Лекція 2

Повторення В лекції 1 ми розглянули:

Поняття про первісну

Озн. $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ є первісною $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, де $\mathcal{X}$ - скінч. або неск. інтервал, якщо

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad F'(x) = f(x)$$

невизначений інтеграл функції $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$

$$\int f(x)dx \overset{df}{=} \{ F(x) + C \}_{C \in \overline{\mathbb{R}^1}}$$

це множина первісних ф-ії f

Таблиця основних первісних.
(доведення їх за означенням)

Адитивність операції інтегрування, лінійність

Заміна змінних

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ \{\Rightarrow\} \int f(\underbrace{\varphi(t)}) d\underbrace{\varphi(t)} = F(\underbrace{\varphi(t)}) + C$$

Інтегрування частинами

$$\int u(x)\, d\, v(x) = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, d\, u(x)$$

$$\int x^2 \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{arctg} x \, d\, v^3 = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x -$$

$u = \operatorname{arctg} x$
$x^2 dx = dv$
$v = \frac{x^3}{3}$

$$- \frac{1}{3} \int x^3 (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2 \cdot 3} \int \frac{x^2 x^{1^{-1}} d x^2}{1+x^2} = \int dx^2 - \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2}$$

Повторення   Ми інтегруванням частинами отримали, що

$$I_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2} I_{n-1} \frac{2n-3}{2(n-1)} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

Інтегрування раціональних функцій

Ми розглянули знаходження первісних від простих дробів

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C$$

$k \neq 1$
$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}\, d(x-a) = A\frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

$\frac{p^2}{4} - q < 0$
$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{Mx+N}{\left[(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^k}dx$$

$x+\frac{p}{2} = t$

$dx = dt$

$x = t - \frac{p}{2}$

$$= \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{[t^2+a^2]^k}dt = \boxed{M\int\frac{t\,dt}{[t^2+a^2]^k}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\boxed{\int \frac{dt}{[t^2+a^2]^k}} = I_n$$

$-\frac{p^2}{2} + q > 0,\ q - \frac{p^2}{2} = \boxed{a^2}$

$$= \frac{M}{\boxed{2}}\int \frac{d(t^2+a^2)}{[t^2+a^2]^k} = \frac{M}{2}\int \frac{du}{u^k} \quad \begin{matrix} k=1 \to \\ k\neq 1 \to \end{matrix}$$

$$\int\frac{x+2}{x^2+x+2}dx = \int \frac{x+2}{(x+\frac{1}{2})^2+2-\frac{1}{4}}dx = \int\frac{t-\frac{1}{2}+2}{t^2+\frac{7}{4}}dt$$

$x+\frac{1}{2} = t$

$$= \int\frac{t\,dt}{t^2+\frac{7}{4}} + \frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^2+7/4} = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{7}{4}}} + \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+\frac{7}{4})}{t^2+\frac{7}{4}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{7}{4}\right| + C = \dots$$

$t = x+1/2$

$\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

Приклад.

① $\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}dx =$

$$x^5+x^4-x^3-x^2 = x^2(x^3+x^2-x-1) = x^2[x^2(x+1)-(x+1)] = x^2(x+1)^2(x-1)$$

$$\frac{x^4+1}{x^2(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{(x+1)^2}$$

$$x^4+1 = A\,x(x-1)(x+1)^2+B(x-1)(x+1)^2+C\,x^2(x+1)^2+D\,x^2(x^2-1)+E\,x^2(x-1)$$

$\underline{x=0}$, $\underline{x=1}$. $\underline{x=-1}$ $\Rightarrow B=-1$, $C =$ . . . .

② $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx$

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

③ $\int \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}dx =$ $\quad 2x^3-x-1 = (x-1)(2x^2+2x+1)$

$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{2x^2+2x+1}$$

Покладемо
$x=1$
$5=5A \quad A=1$

$$6x^2+x-2 = A(2x^2+2x+1)+(x-1)(Mx+N)$$

$x^2: \ 6 = 2A+M$
$\ \ \ \ \ -2 = A-N$ $\quad \Rightarrow M=4$, $N=3$

$$= \int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}dx = \ln|x-1|+\int\frac{d(2x^2+2x+1)\ +dx}{2x^2+2x+1}$$

$$= \ln|x-1|+\ln(2x^2+2x+1)+\boxed{\int\frac{dx}{2(x^2+x+\frac{1}{2})}} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{1/4}}$$

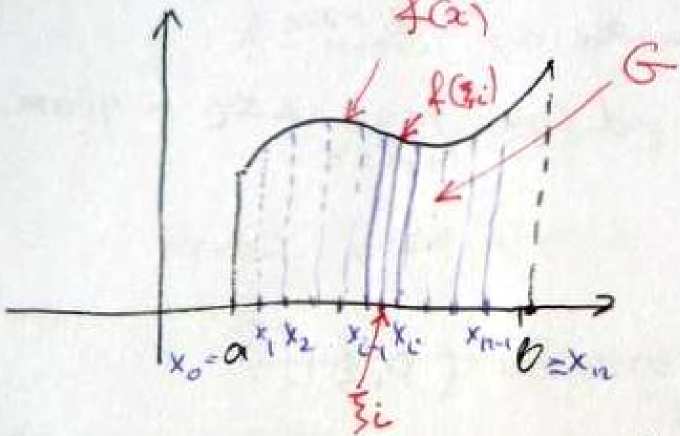
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\boxed{1/2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1/2}{1/2} = \boxed{\mathrm{arctg}\,(2x+1)}$$

Лекція 4

Інтеграл Рімана

1. Задача про знаходження площі, зв'язок її з невизначеним інтегралом.

Розглянемо криволінійну трапецію.



$f(x)$ – неперервна ф-ія

Задача.
Знайти площу кривол. трапеції G.

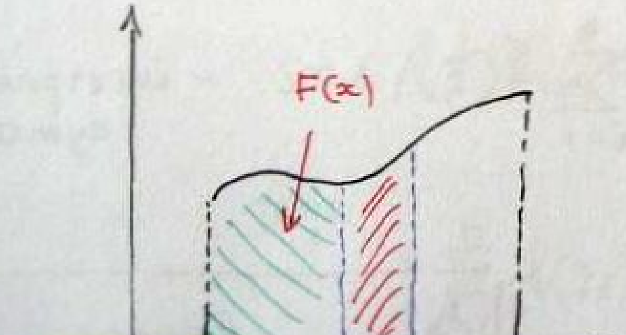
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \approx \text{пл. } G$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$i=1,2,\ldots n$

$$\lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \text{площа } G$$

Цю границю позначимо $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$



Позначимо $F(x)$ площу криволінійної трапеції

$\{(x,y) \mid \ldots\ldots \}$

Знайдемо похідну ф-ії $F(x)$

$F(x+\Delta x) - F(x)$ – заштрих. площа

$$m\Delta x \le F(x+\Delta x) - F(x) \le M\Delta x$$

$$M = \sup_{[x,x+\Delta x]} f(x)$$

$$m \le \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \le M$$

$$m = \inf_{[x,x+\Delta x]} f(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0} M = f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \Rightarrow F(x) \text{ – первісна } f(x),$$

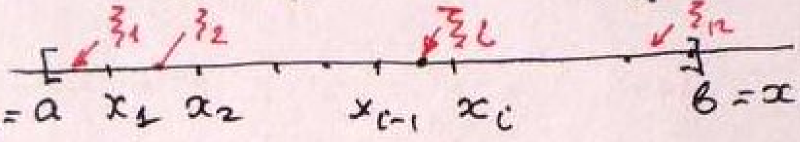
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

2. Означення інтеграла Рімана

а) Розбиття відрізка $[a,b]$

Означ. Скінченне множина точок $\{x_0, x_1, \dots x_n\}$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \qquad p[a,b] = p$$



$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \,; \qquad d(p) = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i \ \text{- діам. розб.}$$

$$\forall i \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

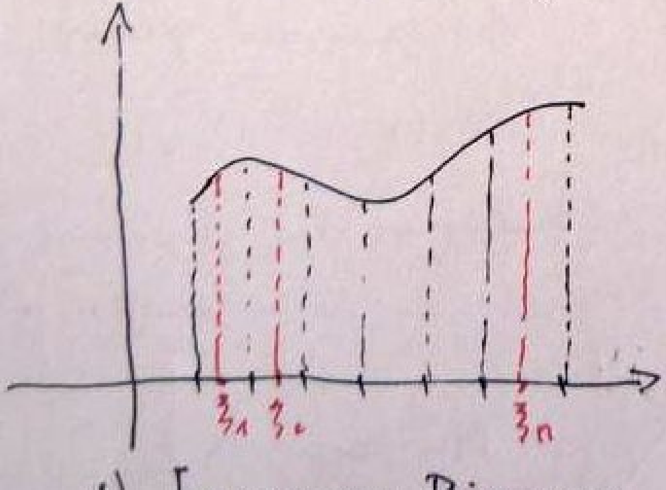
Розбиття з вибр. точками (p, ξ)

$$p = \{x_0, x_1, \dots x_n\} \,; \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n\}$$

б) Інтегральна сума

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (p, ξ) - розбиття з вибр. точк.

$$\sigma(f, (p,\xi)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$ - інтегральна сума



$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(p)\to 0} \sigma(p,\xi)}$$

в) Інтеграл Рімана

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{d(p)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \overset{df}{=}$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ \forall (p,\xi) \ [\, d(p) < \delta \Rightarrow |I - \sigma(p,\xi)| < \varepsilon \,]}$$

!

Необхідна умова інтегрованості функції

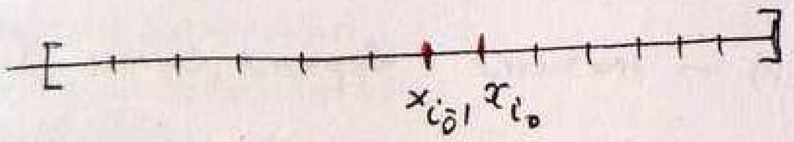
<u>Озн.</u> f-інтегрована на [a,b] $\overset{df}{=}$ $\exists \int_a^b f(x)dx$ . . . .

Теорема. f-інтегр. на [a,b] $\Rightarrow$ f-обмежена на [a,b]

Доведення. Доведення від супрот. Покажемо, що з f-необ. $\Rightarrow$ f-не інтег, тобто $\neg\exists \lim \sigma(p,\xi)$

$$\forall M>0\, \forall \delta>0\ \exists (p,\xi)\ [d(p)<\delta \wedge |\sigma(p,\xi)|>M]$$

Нехай $\forall M\ \forall \delta>0$ і p $d(p)<\delta$



Якщо f-необм. на [a,b], то $\exists\ [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ на якому f-необмежена.

Виберемо на відрізку $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ точку ξ_{i_0} так, щоб

$$|f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}| > \Big|\sum_{i\neq i_0} f(\xi_i)\Delta x_i\Big| + M$$

тоді

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\Big| > M$$

Тому $\lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ не існує.

Теорема доведена.

Суми Дарбу

Нехай $f(x)$ обмежена на $[a,b]$

P – розбиття $[a,b]$ $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$

Позначимо
$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$
$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

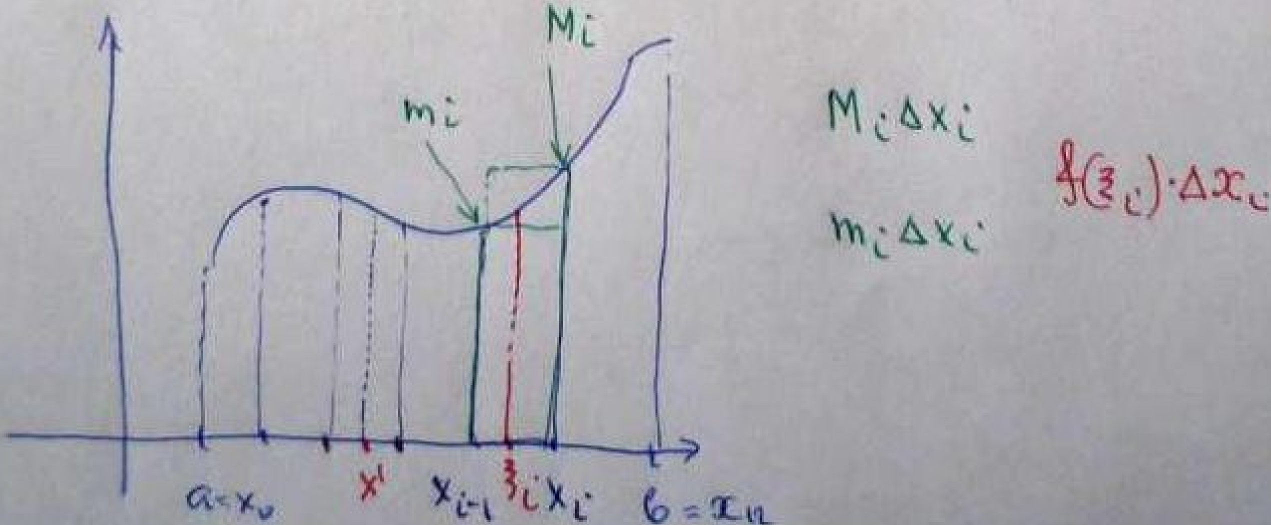
$$\underline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \qquad \overline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

$\underline{S}(P)$, $\overline{S}(P)$ – нижня і верхня суми Дарбу

Означення. Розбиття P_2 подрібнення P_1, якщо $P_1\subset P_2$

Властивості

1. $\forall (P,\xi)$ $\underline{S}(P)\le\sigma(P,\xi)\le\overline{S}(P)$
2. $\overline{S}(P)=\sup\limits_{\xi}\sigma(P,\xi)$, $\underline{S}(P)=\inf\limits_{\xi}\sigma(P,\xi)$
3. $\forall P_1,P_2$ $P_1\subset P_2$ $\overline{S}(P_1)>\overline{S}(P_2)$, $\underline{S}(P_1)\le\underline{S}(P_2)$
4. $\forall P_1,P_2$ $\underline{S}(P_1)\boxed{\le}\overline{S}(P_2)$



6.2.3 Суми Дарбу. Верхній і нижній інтеграл.

Для іншого підходу до поняття інтеграла, а також для формулювання критеріїв інтегрованості функції зручними є поняття сум Дарбу.

Нехай функція f - визначена і обмежена на $[a,b]$. Для довільного розбиття $p(x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b)$ позначимо:

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), 1 = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\overline{S}(p) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \underline{S}(p) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$\overline{S}(p)$, $\underline{S}(p)$ називаються, відповідно, верхньою та нижньою сумами Дарбу.

Нагадаємо, що під розбиттям розуміємо множину точок $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, де $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$.

Означення 6.2.5 *Розбиття p_2 називається подрібненим розбиттям p_1, якщо $p_1 \subset p_2$.*

Властивості сум Дарбу

1. $\forall\ (p,\xi)\ \ \underline{S}(p) \leq \sigma(p,\xi) \leq \overline{S}(p)$.
2. $\overline{S}(p) = \sup_\xi \sigma(p,\xi)$, $\underline{S}(p) = \inf_\xi \sigma(p,\xi)$
3. $\forall p_1, p_2, (p_1 \subset p_2) \overline{S}(p_1) \geq \overline{S}(p_2), \underline{S}(p_1) \leq \underline{S}(p_2)$
4. $\forall p_1, p_2 \underline{S}(p_1) \underset{\leqslant}{} \overline{S}(p_2)$

Доведення.

1. Для $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n\ \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\ \ m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$. Домножимо нерівності на Δx_i і підсумуємо. Отримаємо $\underline{S}(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum f(\xi_i \Delta x_i) = \sigma(p,\xi) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \overline{S}(p)$.

2. $$\sup_\xi \sigma(p,\xi) = \sup_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

   враховуючи, що значення $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ змінюється на своїх відрізках незалежно одне від одного, можемо подовжити

   $$= \sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi_i} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \overline{S}(p)$$

3. Розглянемо випадок, коли розбиття p_2 має на одну точку більше ніж p_1

   $$p_1 : a_0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

   $$p_2 : a_0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i_0-1} < x' < x_{i_0+1} < \ldots < x_n = b$$

   Тоді суми $\overline{S}(p_1)$ і $\overline{S}(p_2)$ відрізняються доданками, які відповідають відрізкам $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, $[x_{i_0-1}, x']$, $[x', x_{i_0}]$. Зауважимо, що $M'_{i_0} = \sup\limits_{x\in[x_{i_0-1},x']} f(x) \leq M_{i_0} = \sup\limits_{[x_{i_0-1},x_{i_0}]} f(x)$, аналогічно $M''_{i_0} = \sup\limits_{x\in[x',x_{i_0}]} f(x) \leq M_{i_0}$. Тоді $M'_{i_0}(x' - x_{i_0-1}) + M''_{i_0}(x_{i_0} - x') \leq M_{i_0}(x' - x_{i_0-1} + x_{i_0} - x') = M_{i_0}(x_{i_0} - x_{i_0-1})$ Звідси отримаємо нерівність

   $$\overline{S}(p_2) \leq \overline{S}(p_1)$$

   Якщо розбиття p_2 отримується додаванням m точок до розбиття p_1, доведення проводиться застосуванням m разів доведеної вже властивості.

4. Нехай p_1, p_2 довільні розбиття відрізка $[a,b]$. Розглянемо їх об'єднання $p = p_1 \cup p_2$. Використовуючи доведені властивості 1 і 3 отримуємо

   $$\underline{S}(p_1) \leq \underline{S}(p) \leq \overline{S}(p) \leq \overline{S}(p_2)$$

Лекція 5

Верхній і нижній інтеграли

Нехай $f(x)$ визначена і обмежена на $[a,b]$

З властивостей сум Дарбу маємо, що

$$\forall p_1 \forall p_2 \quad \underline{S}(p_1) \le \overline{S}(p_2)$$

При фіксованому p_2 $\quad \forall p_1 \quad \underline{S}(p_1) \le S(p_2)$

Тому $\quad \exists \sup\limits_{p_1} \underline{S}(p_1) = \underline{I} \le \overline{S}(p_2)$

Далі враховуючи, що p_2 довільне

$$\forall p_2 \quad \underline{I} \le \overline{S}(p_2) \Rightarrow \exists \inf_{p_2} \overline{S}(p_2) = \overline{I}$$

$$\text{і} \quad \underline{I} \le \inf \overline{S}(p_2) = \overline{I}$$

Отримали, що

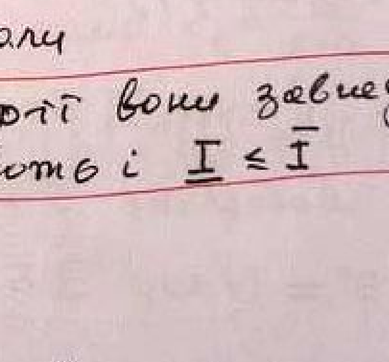
$$\forall p_1, p_2 \quad \boxed{\underline{S}(p_1) \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}(p_2)} \quad !$$

$\underline{I}, \overline{I}$ – верхн. і нижн. інтеграли

Для обмеж. ф-ї вони завжди існують і $\underline{I} \le \overline{I}$

Приклад. Розглянемо ф-ію Діріхле

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x - \text{ірраціон.} \\ 1 & x - \text{раціон.} \end{cases}$$



$[a,b] = [0,1]$

$$\underline{S}(p) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{1}^{n} 0\, \Delta x_i = 0$$

$$\overline{S}(p) = \sum M_i \Delta x_i = \sum_{1}^{n} 1\, \Delta x_i = 1 \qquad \underline{I} = 0 < \overline{I} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i) \Delta x_i = ?$$

Критерії інтегрованості функції

Теорема. Нехай f - визначена і обмежена на $[a,b]$.
Наступні твердження є еквівалентні:

1°. $\underline{I} = \overline{I}$

2°. $\forall \varepsilon>0 \ \exists P \ [\overline{S}(P)-\underline{S}(P)<\varepsilon]$

3° $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall \boxed{P} \ [d(P)<\delta \Rightarrow \overline{S}(P)-\underline{S}(P)<\varepsilon]$

4°. $\exists \int_a^b f(x)dx = I$ і $I=\underline{I}=\overline{I}$

Доведення. (В тексті лекції доведено $1° \Rightarrow 2° \wedge 2° \Rightarrow 1 \wedge$
$\wedge\ 2° \Rightarrow 3° \wedge 3° \Rightarrow 2° \wedge 3° \Rightarrow 4° \wedge 4° \Rightarrow 3°$, тобто
$1° \Leftrightarrow 2° \Leftrightarrow 3° \Leftrightarrow 4°$)

Ми обмежимося доведенням $3° \Leftrightarrow 4°$, тобто одним критерієм інтегрованості функції

Розшифруємо, що означає $\exists \int_a^b f(x)dx = I \overset{def}{=}$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall (P,\xi) \ [d(P)<\varepsilon \Rightarrow |I-\sigma(P,\xi)|<\varepsilon]$$

Доведення $3° \Rightarrow 4°$.

$$3° = \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta \ \forall (P,\xi) \ [d(P)<\delta \Rightarrow |\overline{S}(P)-\underline{S}(P)<\varepsilon]$$

$\Downarrow$

Відомо, що $\underline{S}(P) \le \underline{I} < \overline{I} < \overline{S}(P)$ $\Rightarrow |\overline{I}-\underline{I}|<\varepsilon$

Тепер маємо:

$\underline{S}(P) \le I \le \overline{S}(P) \Leftarrow I=\overline{I}=\underline{I}$ - так познач.

$\underline{S}(P) \le \sigma(P,\xi) \le \overline{S}(P)$

$|I-\sigma(P,\xi)|<\varepsilon \Leftarrow$

$\|$

4°

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall (P,\xi) \ [d(P)<\delta \Rightarrow |I-\sigma(P,\xi)|<\varepsilon]$$

Доведення $4^\circ \Rightarrow 3^\circ$

$$4^\circ = \boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (p,\xi)\ [d(p)<\delta} \Rightarrow |I-\sigma(p,\xi)|<\varepsilon]$$

$$\forall \xi \qquad I-\varepsilon < \sigma(p,\xi) < I+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$I-\varepsilon \le \sup_{\xi} \sigma(p,\xi) = \overline{S}(p) \le I+\varepsilon$$

$$\boxed{\overline{S}(p)-\underline{s}(p)<2\varepsilon} \Leftarrow \qquad I-\varepsilon \le \inf \sigma(p,\xi) = \underline{S}(p) \le I+\varepsilon$$

Отримали 3°.

Класи інтегрованих функцій

Теорема. Якщо функція $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, то вона інтегрована на $[a,b]$

Доведення. Покажемо що виконується критерій 3°. Якщо f - неперервна на $[a,b]$, то вона рівномірно неперервна. Тоді для $\forall \varepsilon>0$ візьмемо $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{b-a}$

$$f\text{ - рівн. неп. } [a,b] \Rightarrow \varepsilon_1>0\ \exists \delta>0\ \forall x', x''\ [|x'-x''|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon_1]$$

Візьмемо розбиття p $d(p)<\delta$. Тоді

$$\overline{S}(p)-\underline{S}(p) = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i')-f(\xi_i'')| \Delta x_i =$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_1 \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Отримали

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall p\ [d(p)<\delta \Rightarrow |\overline{S}(p)-\underline{S}(p)|<\varepsilon]$$

Теорема доведена

Теорема. Якщо функція $f(x)$ визначена і монотонна на $[a,b]$, то вона інтегровна на $[a,b]$

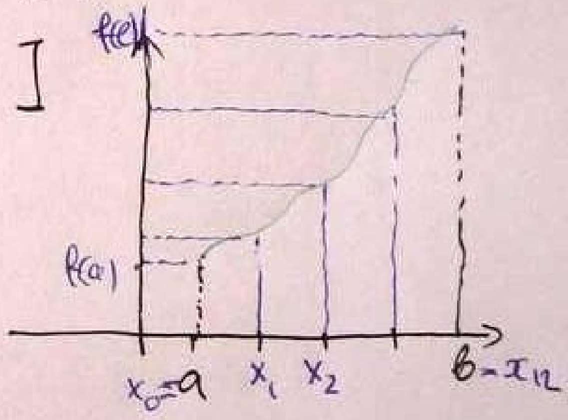
Доведення. Покажемо виконання критерія 3°.

Для $\forall \varepsilon>0 \ \exists\ \delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \ \forall P$

$$\Big[d(P)<\delta \Rightarrow \overline{S}(P)-\underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right]\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right] =$$

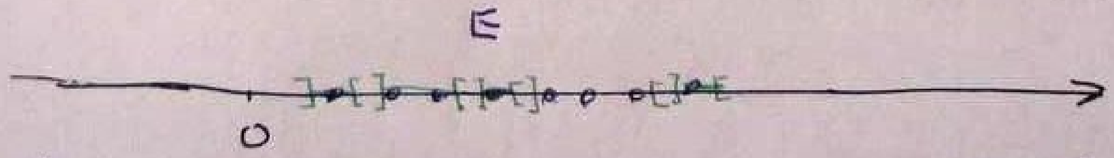
$$= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\left(f(b)-f(a)\right) = \varepsilon \ \Big]$$



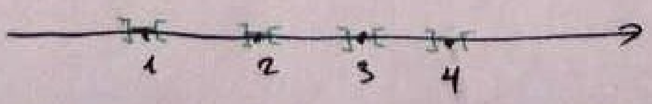
Множини міри нуль за Жорданом і за Лебегом

Означ. Множина $E \subset \mathbb{R}^1$

$$mE=0 \overset{df}{=} \forall\varepsilon>0\ \exists\{]a_i,b_i[\}_{i=1}^{n}\Big[\bigcup_{i=1}^{n}]a_i,b_i[\ \supset E \wedge \sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\varepsilon\Big]$$



$E=\{1,2,3,4\}$



$mE=0$

$E=\{\frac{1}{n}\}$

$mE-?$

Означ.

$$\mu E=0 \overset{df}{=} \forall\varepsilon>0\ \exists\{]a_i,b_i[\}_{i=1}^{\infty\vee n}\Big[\bigcup_{i}]a_i,b_i[\ \supset E \wedge \sum_{i=1}^{\infty\vee n}(b_i-a_i)<\varepsilon\Big]$$

$mE=0 \Rightarrow \mu E=0 \qquad mQ=? \quad \mu Q=?$

Лекція 6

①

Ми розглянули критерії інтегровності функції

Довели:

$\exists \int_a^b f(x)dx$ = f - інтегр. на $[a,b] \Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (P)\ [d(P)<\delta \Rightarrow |\overline{S}(P)-\underline{S}(P)|<\varepsilon]$

а також довели:

1° f - непер. на $[a,b] \Rightarrow f$ - інтегр. $[a,b]$

2° f - монот. на $[a,b] \Rightarrow f$ - інтегр. на $[a,b]$

Ввели поняття множин міри нуль за Жорданом і за Лебегом.

В конспекті є доведення:

3° f - непер. на $[a,b]\setminus E \wedge mE=0 \} \Rightarrow \{ f$ - інтегр. на $[a,b]$

З 3° $\} \Rightarrow \{ f$ - непер. на $[a,b]\setminus E \wedge E$ - скінч. $\{\Rightarrow f$ - інт. на $[a,b]$

4°. f - непер. на $[a,b]\setminus E \wedge \mu E=0 \{\Rightarrow\} f$ - інтегр. на $[a,b]$

Приклад. Нехай $E = Q$ - множина раціональних чисел.

Покажемо що, $\mu Q=0$ (mQ - не існує)

Множина Q - злічена, тому її можемо перенумерувати $Q = \{r_1, r_2 \ldots\ r_n, \ldots\ldots\}$

Візьмемо $\forall \varepsilon>0$. Точку r_1 покриємо інтервалом $]a_1,b_1[$ $b_1-a_1<\frac{\varepsilon}{2}$,

точку r_2 — " — $]a_2,b_2[$ $b_1-a_1<\frac{\varepsilon}{2^2}$

— — — — — — — $]a_n,b_n[$ $b_n-a_n<\frac{\varepsilon}{2^n}$

точку r_n . . . . . .

— — — — — — — —

Тоді система інтервалів $\{]a_i,b_i[\}_{n=1}^{\infty}$ покриває Q

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}]a_i,b_i[\supset Q \wedge \sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n) < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \varepsilon\frac{1/2}{1-1/2} = \varepsilon$$

З 4° маємо, що функція яка має множину точок розриву Q є інтегрованою.

Це, наприклад, функція $R(x)$ Рімана

Властивості інтегрованих функцій

$R[a,b]$ – множина функцій інтегрованих за Ріманом

Теорема.

$$f, g \in R[a,b] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f+g = F \\ \alpha f \\ f \cdot g \\ f/g \ (\forall x \in [a,b] \ |g(x)| \geq 0 \\ |f| \\ f|_{[c,d]} \ [c,d] \subset [a,b] \end{array} \right. \quad \in R[a,b]$$

Доведення проведемо для випадку добутку функцій. Нехай функції f і g виконується критерій 3° інтегровності. Покажемо, що 3° виконується і для функції $F = f \cdot g$

$$3^\circ \Rightarrow f\text{-інт.} = \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ \forall P \ [d(P) < \delta_1 \Rightarrow |S(f,P) - s(f,P)| < \varepsilon_1]$$

$$3^\circ \Rightarrow g\text{-інт} = \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 \ \forall P \ [d(P) < \delta_2 \Rightarrow |S(g,P) - s(g,P)| < \varepsilon_2]$$

ε_1 і ε_2 уточнимо пізніше,

Позначимо: $M_i(f) - m_i(f) = \omega_i(f)$, $M_i(g) - m_i(g) = \omega_i(g)$

$$K = \sup_x |f(x)|, \quad L = \sup_k |g(x)|$$

$$\omega_i(F) = M_i(F) - m_i(F) = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |F(x') - F(x'')| =$$

$$= \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') \cdot g(x') - f(x'')g(x'')| = \sup_{x', x'' \in [\ ]} |f(x')g(x') - f(x')g(x'')$$

$$+ f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \leq \sup_{x', x'' \in [\ ]} \Big(|f(x')| \, |g(x') - g(x'')| +$$

$$+ |g(x'')| \, |f(x') - f(x'')| \Big) \leq \ldots\ldots \leq K \omega_i(g) + L \omega_i(f)$$

Маємо $\quad \omega_i(F) \leq K \omega_i(g) + L \omega_i(f)$

Тому

$$\overline{S}(F,P)-\underline{S}(F,P)=\sum_{i=1}^{n}\left[M_i(F,P)-m_i(F)\right]\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(F)\Delta x_i\le$$

$$\le K\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i+L\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta x_i$$

З інтегровності f, g (3°) $\forall\,\varepsilon>0$ візьмемо

$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2K}$, $\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2L}$ $\exists\,\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ $\forall\,P$

$d(P)<\delta\Rightarrow$ $\overline{S}(F,P)-\underline{S}(F,P)<K\cdot\frac{\varepsilon}{2K}+L\frac{\varepsilon}{2L}=\varepsilon$

Для функції $F=f\cdot g$ виконується критерій 3°!

Для інших випадків доведення аналогічне.

Властивості інтеграла Рімана

Теорема (лінійність інтеграла)

Якщо f, g – інтегровні, то $\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $\alpha f+\beta g$ – інтегр. і

$$\int_a^b[\alpha f+\beta g](x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$$

Довед. Для $\forall\,(P,\xi)$ розглянемо інтегр. суми. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n}[\alpha f+\beta g](\xi_i)\Delta x_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+\beta\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i$$

При переході до границі отримаємо твердження теореми. В теоремі мова іде про лінійність функціоналу

$$F(f)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$F(\alpha f+\beta g)=\alpha F(f)+\beta F(g)$$

Теорема (адитивність інтеграла)

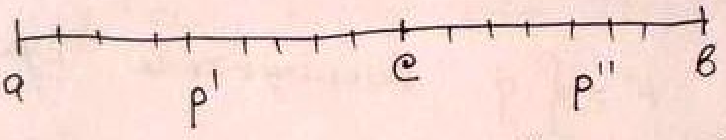
Нехай f - інтегр. на $[a,b]$ і $a<c<b$, тоді f інтегр. на $[a,c]$ і $[c,b]$, і

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Довед. Розглянемо (P,ξ) і $P \ni c$. Тоді

$$\sigma(f,(P,\xi)) = \sigma(f,(P',\xi')) + \sigma(f,(P'',\xi''))$$

де P', P'' - розбиття $[a,c]$, $[c,b]$.



$d(P) \geq d(P')$, $d(P) \geq d(P'')$ $d(P) \to 0 \Rightarrow d(P') \to 0 \wedge d(P'') \to 0$

При переході $d(P) \to 0$ отримуємо твердження теореми.

Означення. $a > b$ $\int_a^b f(x)dx \overset{df}{=} -\int_b^a f(x)dx$ $\Big\}$ Δx_i - знак

$$\int_a^a f(x)dx \overset{df}{=} 0$$

Теорема. Нехай $a, b, c \in \mathbb{R}$ і f інтегр. в ньому відрізку.

Тоді $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Довед. Нехай $b < a < c$. Тоді

$$\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx \Rightarrow$$ ~~$-\int_a^a f(x)dx = \int_b^c f(x)dx - \int_a^a f(x)dx$~~ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow -\int_b^a f(x)dx = \int_a^c - \int_b^c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c + \int_c^b f(x)dx$$

$F([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$, $F([a,b]) = F([a,c]) + F([c,b])$

Теорема. Якщо $a \le b$, f-інтегр. на $[a,b]$, то $|f|$ інтегр. на $[a,b]$ і

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le C(b-a)$$

$$C = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Дов. $\forall (P,\xi)$ $\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i < C\sum_{i=1}^n \Delta x_i = C(b-a)$

При $d(P) \to 0$ отримаємо твердження теореми.

Теорема. Якщо $a < b$ і $\forall x \in [a,b]\ [f_1(x) \le f_2(x)]$, тоді

$$\int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx$$

Дов. (див. текст лекції)

Теорема. Нехай f, g - інт. на $[a,b]$ і $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$

$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ і $\forall x \in [a,b]\ [g(x) \ge 0] \vee \forall x \in [a,b]\ [g(x) \le 0]$

Тоді

$$\exists \mu \in [m, M] \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

Довед. Нехай $g(x) \ge 0$. Тоді

$$m g(x) \le f(x)g(x) \le M g(x)$$

$$\Rightarrow \quad m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

$$m \le \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}}_{\mu} \le M$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

f-неперер. $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Лекція 7

Інтеграл зі змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца

Нехай f - інтегрована на $[a,b]$, тобто $f \in R[a,b]$

Розглянемо функцію

$$\mathcal{F}(x) \overset{df}{=} \int_a^x f(t)dt \qquad x \in [a,b]$$

Функцію $\mathcal{F}(x)$ називають інтегралом зі змін. в. межею

Теорема. Якщо $f \in R[a,b]$, то $\mathcal{F} : [a,b] \to \mathbb{R}$ неперервна на $[a,b]$.

Доведення.

Якщо f - інтегр. на $[a,b] \Rightarrow f$ - обмеж. на $[a,b] \Rightarrow$

$$\exists \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = C \Rightarrow \forall x\in[a,b]\ \left[\,|f(x)| \le C\,\right]$$

Нехай $x,\ x+h \in [a,b]$

$$|\mathcal{F}(x+h)-\mathcal{F}(x)| = \left|\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| = \left|\int_a^x + \int_x^{x+h} - \int_a^x f(t)dt\right| =$$

$$= \left|\int_x^{x+h} f(t)dt\right| \le C h$$

З нерівності $|\mathcal{F}(x+h)-\mathcal{F}(x)| \le Ch$ випливає непер. $\mathcal{F}(x)$.

Теорема. Якщо $f \in R[a,b]$ і f неперервна в т. $x \in [a,b]$, то

$$\mathcal{F}'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Доведення.

Розгляндмо різницю

$$\left|\frac{\mathcal{F}(x+h)-\mathcal{F}(x)}{h}-f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - f(x)\right| =$$

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]dt\right| \le \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt\right|$$

з означення неперервності f в точці x

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall t\in[a,b]\ \left[\,|x-t|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(x)|<\varepsilon\,\right]$$

Тому при $|h|<\delta \Rightarrow t\in[x,x+h] \wedge |t-x|<\delta$ і

$$\left|\frac{\mathcal{F}(x+h)-\mathcal{F}(x)}{h}-f(x)\right| \le \left|\frac{1}{h}\int_a^{x+h}\varepsilon\, dt\right| = \varepsilon\frac{1}{h}\cdot h = \varepsilon$$

Звідси

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{F}(x+h)-\mathcal{F}(x)}{h} = \mathcal{F}'(x) = f(x)$$

Теорема. Нехай f - неперервна на $[a,b]$, тоді

$$\exists\, \mathcal{F}(x)\quad \forall x\in[a,b]\quad \mathcal{F}'(x)=f(x)$$

Доведення.

f - непер. на $[a,b] \Rightarrow f$ - інтегр. на $[a,b] \Rightarrow \exists\, \mathcal{F}(x)=\int_a^x f(t)dt \wedge$

$\wedge\ \mathcal{F}'(x)=f(x)$ (згідно доведеної теореми)

Наслідок. Для $\forall$ f - непер $\exists$ первісна ф-ї

Цією первісною може бути $\mathcal{F}(x)=\int_a^x f(t)dt$

Теорема. Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ обмежена і неперер. за виключенням скінч. множини точок, тоді для f існує узагальн. первісна.

Довед. Цією узаг. первісн. може бути $\mathcal{F}(x)=\int_a^x f(t)dt$

(довед. див. у конспекті)

Теорема. Нехай f - неперервна на $[a,b]$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a),$$

де $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ довільна первісна функції f на $[a,b]$

Доведення. Нехай $F(x)$ довільна первісна f на $[a,b]$,

а $\mathcal{F}(x)=\int_a^x f(x)dx$ згідно попередньої теореми

також є первісною для f.

Відомо, що ці первісні відрізняються на сталу

Тому

$$F(x)=\mathcal{F}(x)+C=\int_a^x f(x)dx+C$$

Покладемо $x=a$, отримаємо

$$F(a)=\int_a^a f(x)dx+C=C \Rightarrow C=F(a)$$

Отже

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx+F(a)$$

Тому $\forall x\in[a,b]$

$$\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a)$$

При $x=b$ будемо мати

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)}$$

Формула Ньютона-Лейбніца

Має місце і узагальнена теорема

Теорема. Якщо f - обмежена і неперервна на $[a,b]$, за виключ. скінченної множини точок, то

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

де $F(x)$ - довільна узагальн. первісна f на $[a,b]$ (довед. див. конспект).

Інтегрування частинами.

Формула Тейлора

Теорема. Нехай функції $u(x), v(x), u'(x), v'(x)$ - неперервні на $[a,b]$. Тоді

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Доведення.

$$d(u(x)\cdot v(x)) = (u(x)\cdot v(x))'dx = u(x)v'(x)dx + u'(x)v(x)dx$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b (u(x)v(x))'dx \underset{\Uparrow}{=} u(x)v(x)\Big|_a^b$$

за формулою Н-Л

звідси $$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$$\int_a^b u\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Використаємо інтегр. частинами для отримання формули Тейлора

Нехай функція в $U(a)$ має непер. похідні до $n+1$ порядку.

$x \in U(a)$

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = -\int_a^x \overset{u}{\overset{\shortparallel}{f'(t)}}\,\overset{dv}{\overset{\shortparallel}{d(x-t)}} =$$

$$= -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)dt = f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}\int_a^x f''(t)\,d(x-\cancel{t})^2 \cancel{dt} =$$

$$= f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2\Big|_a^x + \frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt =$$

$$= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}\int_a^x f'''(t)\,d(x-t)^3 = \dots$$

$$= \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \overset{r_n(x)}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}}$$

$$\boxed{r_n(x)} = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\frac{(-1)(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^x = \boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Заміна змінних у визначеному інтегралі

Теорема. Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ неперервна на $[a,b]$ і відображення $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ – неперервне і має $\varphi'(t)$ – непер. на $[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$

Тоді
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Довед. Нехай $F(x)$ – первісна ф-ія для f, тоді $F(\varphi(t))$ – буде первісна для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Дійсно $$\left(F(\varphi(t))\right)' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Згідно формули Н-Л
$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a)$$

Тому
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Приклад 1.
$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\;a\cos t\,dt =$$

$x=\varphi(t)=a\sin t$

$\varphi:[0,\frac{\pi}{2}]\to[0,a]$

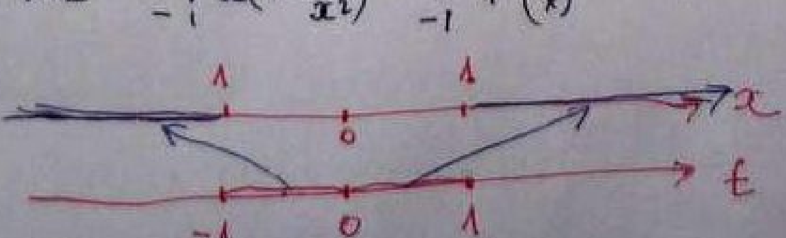
$$= a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$
$$= a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Приклад 2.
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^1 = \operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^1\frac{dx}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = -\int_{-1}^1\frac{d(\frac{1}{x})}{1+(\frac{1}{x})^2} = -\int_{-1}^1\frac{dt}{1+t^2} = -\operatorname{arctg} t\Big|_{-1}^1 = -\frac{\pi}{2}$$

$x=\varphi(t)=\frac{1}{t}$

$t=\frac{1}{x}$



Застосування визначеного інтеграла.

Поняття про міру множини

[міра - довжина, площа, об'єм].

Сформулюємо задачу знаходження міри. Ми хочемо кожній множині E поставити у відповідність деяке число $mE \in \mathbb{R}$:

$E \to mE \in \mathbb{R}$, вимагати певні властивості:

1°. $mE > 0$

2°. $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$ $(E_1 \cap E_2 = \varnothing)$ - адитивність.

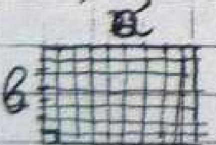
3°. $E_1 \cong E_2 \to mE_1 = mE_2$

(E_1 і E_2 - конгруентні — $\parallel$ переносом і поворотом їх можна сумістити)

4°. $me = 1$

Чи ця задача має розв'язок? Виявляється, що в $\mathbb{R}$ і $\mathbb{R}^2$ ця задача має розв'язки (Банах), в $\mathbb{R}^3$ - ні (Хаусдорф, Банах, Тарський).

$\mathbb{R}^2$



$a = m$, $b = n \in \mathbb{Z}$ $S = m \cdot n = a \cdot b$. (Розглянути $a, b \in \mathbb{Q}$ і $a, b \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

Міра Жордана.

Розглядатимемо міру множин $E \subset \mathbb{R}^2$, $E \subset \mathbb{R}^3$

Озн. 1 Околом точки (x_0, y_0) є множина точок $\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r\} = U_r(x_0, y_0)$

Озн. 2. Точка M зветься внутрішньою

точкою множини E, якщо $\exists U(M): U(M)\subset E$

Озн.3 Точка M зветься граничною точкою множини E, якщо $\forall \varepsilon$ $\tilde{U}_\varepsilon(M)\cap E \neq \emptyset$. $\tilde{U}_\varepsilon(M) = U_\varepsilon(M)\setminus\{M\}$

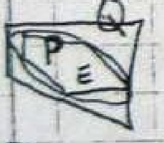
Озн.4 $\overline{E} = E \cup E'$, де E' - множина граничних точок

Озн.5 M зветься точкою межі множини E, якщо $\forall \varepsilon$ $U_\varepsilon(M)\cap E\neq\emptyset$ і $U_\varepsilon(M)\cap CE \neq\emptyset$ (CE - доповнення до E)

Нехай $E\subset R^2$. P, Q - многокутники в R^2. Що таке mP, mQ - відомо. mP задовільн. властивості 1), 2), 3), 4).

Позначимо $m^*E \overset{def}{=} \inf\limits_{Q\supset E}\{mQ\}$

$$m_*E \overset{def}{=} \sup_{P< E}\{mP\}.$$



E - обмежена $\to$ $\{mQ\}$ і $\{mP\}$ обмежені знизу і зверху відповідно

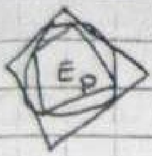
Тоді m^*E - верхня міра Жордана.
m_*E - нижня міра Жордана.

Озн. Множина E зветься вимірною за Жорданом, якщо $m^*E = m_*E = mE$, mE - міра Жордана.

Позначення: $\mathring{P}$ - множина внутр. точок
$\overline{P}$ - замикання множини.
$m\mathring{P} = m\overline{P}$.

Многокутник = множина, яку можна розбити на скінч. к-ть трикутників без спільних точок (з межею або

без межі)
$\overline{E} \subset \mathbb{R}^2$.



$$\sup_{P\subset E}\{mP\} = m_* E$$
$$\inf_{P\supset E}\{mP\} = m^* E.$$

Властивості mE за Жорданом

1° E - вимірна $\leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ P, Q - многокутники $P \subset E$, $Q \supset E$, $mQ - mP < \varepsilon$.

▶ $(\rightarrow)$ E - вимірна $\rightarrow$ $m_* E = m^* E = mE$.
Тоді за озн. sup і inf, $\forall \varepsilon > 0\ \exists P : m^* E - \frac{\varepsilon}{2} < mP$ а також $\exists Q : m^* E + \frac{\varepsilon}{2} > mQ$ $\rightarrow$
$\rightarrow mQ - mP < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$(\leftarrow)$ Нехай $\forall \varepsilon > 0\ \exists P, Q : mQ - mP < \varepsilon$.
Відомо, що $\forall P, Q : P \subset E \subset Q$
$mP \le m_* E \le m^* E \le mQ$, отже, якщо виконуються умови, що $m^* E - m_* E < \varepsilon$ $\rightarrow$
$\rightarrow m^* E = m_* E$. ◀

2° E - вимірна $\leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists E_1, E_2$ - вимірні, $E_1 \subset E \subset E_2$, $mE_2 - mE_1 < \varepsilon$.

▶ $(\rightarrow)$ Очевидно, бо P, Q - вимірні. Застосуємо властивість 1°.

$(\leftarrow)$ $\forall \varepsilon$.

E_1 - вимірна $\rightarrow$ $\exists P : m_* E_1 - \varepsilon/2 < mP$,
E_2 - вимірна $\rightarrow$ $\exists Q : m^* E_2 + \frac{\varepsilon}{2} > mQ$
$\rightarrow m^* E_2 - m_* E_1 + \varepsilon > mQ - mP \rightarrow$
$\rightarrow mQ - mP < m^* E_2 - m_* E_2 + \varepsilon < 2\varepsilon$.

Отже $\forall \varepsilon > 0\ \exists P, Q : Q \supset E \supset P$, $mQ - mP < 2\varepsilon \rightarrow$ використься 1°. → E вимірна. ◄

3° E - вимірна ↔ $m\partial E = 0$.

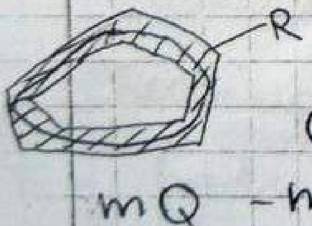
∂E - множина точок межі E.

► (→) E - вимірна. → $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P, Q$ - многокутники: $P \subset E \subset Q$, $mQ - mP < \varepsilon$. Візьмемо замість $P - \underline{P}$, а замість $Q - \overline{Q}$: $P \sim \underline{P}$, $Q \sim \overline{Q}$

Тоді $Q \setminus P \supset \partial E$ $Q \setminus P$ - многокутник [illegible]. $m(Q \setminus P) < \varepsilon$. З цієї нерівності випливає, що $m\partial E = 0$ (Аналогічно до mE на відрізку - ∃ скінч. к-ть прямокутників, що покривають ∂E і $m(Q \setminus P) < \varepsilon$ $\forall \varepsilon$.)

Озн. $E \subset \mathbb{R}^2$, $mE = 0 \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0$ $\exists R$ - многокутник: $R \supset E$, $mE < \varepsilon$.

(←) $m\partial E = 0 \to \forall \varepsilon > 0$ $\exists R$ - многокутник: $R \supset \partial E$, $mR < \varepsilon$. Нехай $P = E \setminus \mathring{R}$, $Q = \overline{E} \cup R$ Тоді $P \subset E \subset Q$,



$mQ - mP < \varepsilon$.

Отже, $\exists P, Q$: $P \subset E \subset Q$, $mQ - mP < \varepsilon$ $\forall \varepsilon$ → E вимірна. ◄

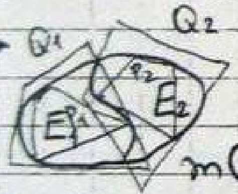
4° E_1, E_2 - вимірні → $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \setminus E_2$ - вимірні.

► Зауважимо, що $\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$, $\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$, $\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$.

Тепер E_1 – вимірна → $m\partial E_1 = 0$,
E_2 – вимірна → $m\partial E_2 = 0$ →
→ $m\partial(E_1) \cup \partial E_2) = 0$. → $m\partial(E_1 \cup E_2) = 0$ →
→ $E_1 \cup E_2$ – вимірна. ◄

Нехай $G_2, G_1 \subset \mathbb{R}^2$, $mG_1 = 0 = mG_2$ → $m(G_1 \cup G_2) = 0$. $\forall \varepsilon$:
$mG_1 = 0$ → $\exists R_1 : R_1 \supset G_1$, $mR_1 < \varepsilon$.
$mG_2 = 0$ → $\exists R_2 : R_2 \supset G_2$, $mR_2 < \varepsilon$.
Візьмемо $R_1 \cup R_2 = R$ → $\exists R : R \supset G_1 \cup G_2$, $mR < 2\varepsilon$.

5°. E_1, E_2 – вимірні, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Тоді $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$.

►


З вимірності E_1 і E_2:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists P_1, Q_1$ $P_1 \subset E_1 \subset Q_1$,
$mQ_1 - mP_1 < \varepsilon$ $mP_1 \le mE_1 \le mQ_1$;
$\exists P_2, Q_2$: $P_2 \subset E_2 \subset Q_2$; $mQ_2 - mP_2 < \varepsilon$;
$mP_2 \le mE_2 \le mQ_2$.
Нехай $P = P_1 \cup P_2$, $Q = Q_1 \cup Q_2$
$P \subset E_1 \cup E_2$, $Q \supset E_1 \cup E_2$.
$mP \le m(E_1 \cup E_2) \le mQ$

$mP_1 + mP_2 = m(P_1 \cup P_2) = mP \le m(E_1 \cup E_2) \le$

$\le mQ \le mQ_1 + mQ_2$

Далі ~~$(mQ_1 + mQ_2) - (mP_1 + mP_2) < 2\varepsilon$~~).
Також $mP_1 \le mE_1 \le mQ_1$ (аналогічно для E_2) отже, $mP_1 + mP_2 \le mE_1 + mE_2 \le$
$\le mQ_1 + mQ_2$.

Тому $m(E_1 \cup E_2) - (mE_1 + mE_2) \le$
$\le (mQ_1 + mQ_2) - (mP_1 + mP_2) < 2\varepsilon$.

Отже, $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$. ◄

Чи введена нами міра задовільн. властивостям 1 – 4 і міри?

1. $mE \ge 0$ – виконується
2. адитивність – доведено
3. рівність для конгруентних (на основі того, що це викон. для многокутників)
4. $me = 1$ – те саме.

Отже, введена міра Жордана задовільн. властивості 1-4.

Але не всі множини мають міру. Нехай $A = [0, 1] \cap Q$, $A \times A = E$. $m^*E = \inf\limits_{Q \supset E} \{mQ\} = 1$, $m_*E = \sup\limits_{P \subset E} \{mP\} = 0$ бо $\nexists$ многокутників, вписаних ~~яких~~ в E.

Площа криволін. трапеції

$$f(x) \ge 0 \quad E = \{(x, y) \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$$

Теорема. Нехай функція $f : f(x) \ge 0$, f-інтегрована на $[a, b]$. Тоді E – вимірна, $mE = \int_a^b f(x)\,dx$.

► f-інтегр. $\to$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists p : \overline{S}(p) - \underline{S}(p) < \varepsilon$

$\overline{S}(p) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ – сума площ прямокутників, або площа многокутника, описаного навколо E

$\underline{S}(p) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ – площа многокутника, Міра $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ $m: E \to mE \in \mathbb{R}$

1°. $mE \geq 0$

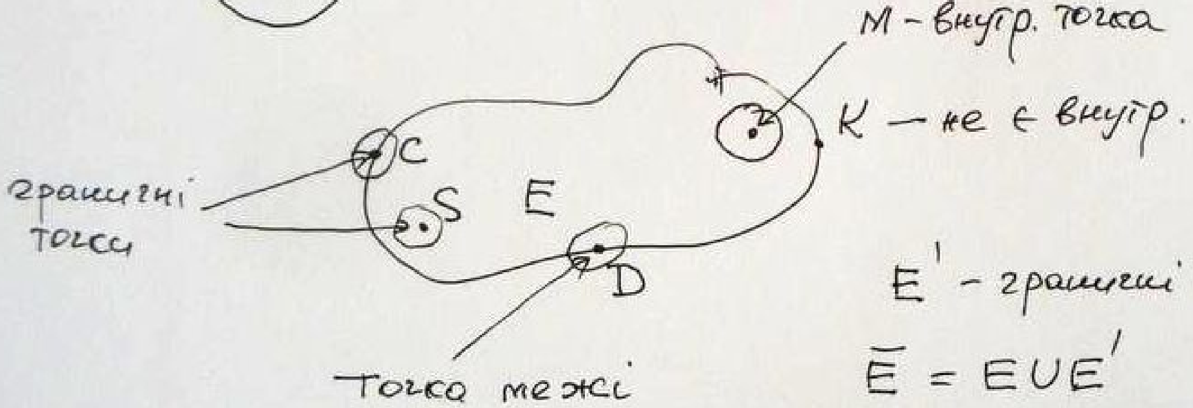
2° $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$ $E_1 \cap E_2 = \varnothing$

3°. $E_1 \cong E_2 \Rightarrow mE_1 = mE_2$

4°. $me = 1$

$\mathbb{R}^2$

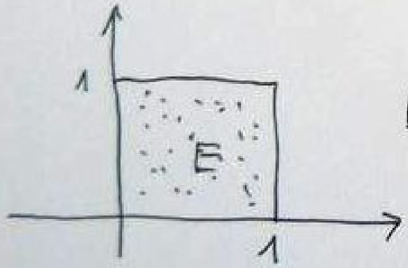
$U_\varepsilon(M)$ $M(x_0, y_0)$



E' - граничні точки E

$\bar{E} = E \cup E'$

∂E - межа E



$E = \{(x,y) \mid x \text{ i } y \text{ - раціон.}\}$

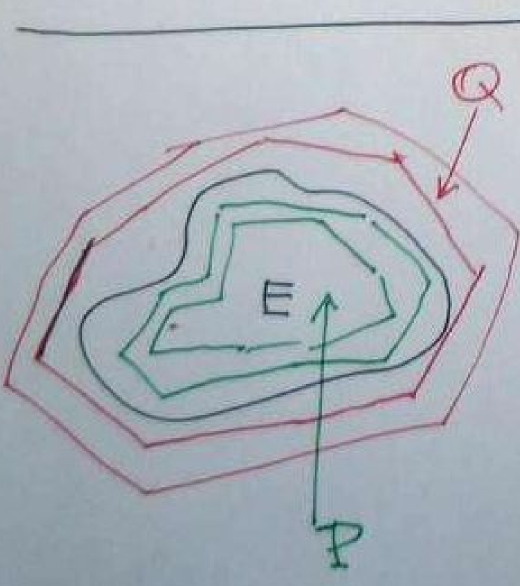
$E' = [0,1] \times [0,1]$

$\bar{E} = [0,1] \times [0,1]$

$\partial E = [0,1] \times [0,1]$

$\mathring{E}$ - внутр. точки

$\mathring{E} = \varnothing$



$m^* E \overset{df}{=} \inf\{mQ\}$

$m_* E \overset{df}{=} \sup\{mP\}$

E - вимірна $\overset{df}{=} m_* E = m^* E = \boxed{mE}$

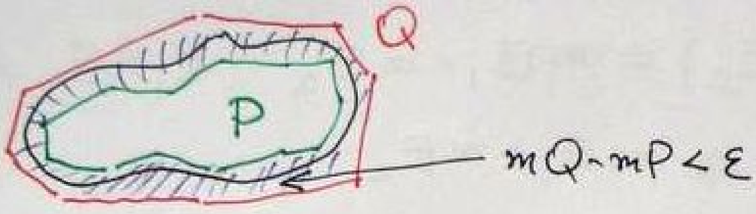
$m\mathring{P} = m\bar{P}$

$m\mathring{Q} = m\bar{Q}$

Властивість 1°

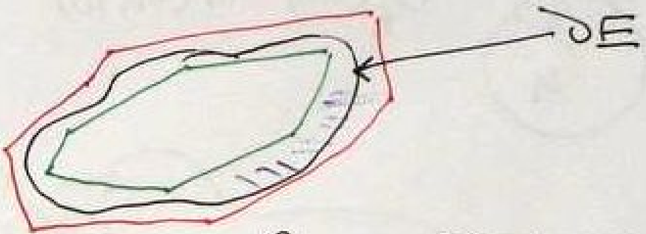
$$E\text{ - вимірна} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\ P, Q\text{ - мног. } P\subset E,\ Q\supset E$$

$$[mQ - mP < \varepsilon]$$



Властивість 3° E - вимірна $\Leftrightarrow m\partial E = 0$

З вл. 1° $\Rightarrow \exists\ P, Q$



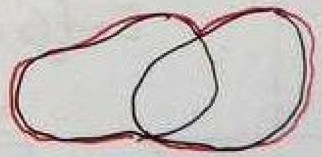
$$\partial E \subset Q \setminus \overset{\circ}{P} \Rightarrow m\partial E \le mQ - mP$$

Властивість 4°

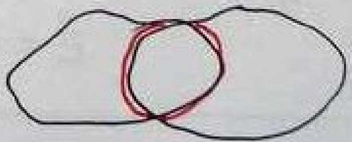
$$E_1, E_2\text{ - вим.} \Rightarrow E_1\cup E_2,\ E_1\cap E_2,\ E_1\setminus E_2\text{ - вим.}$$

Це випливає з власт. 3° і властивостей межі.

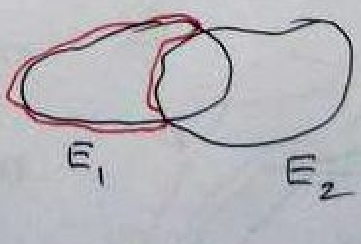
$$\boxed{\partial(E_1\cup E_2)} \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$$



$$\boxed{\partial(E_1\cap E_2)} \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$$



$$\boxed{\partial(E_1\setminus E_2)} \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$$



Лекція 9
(скорочений варіант)

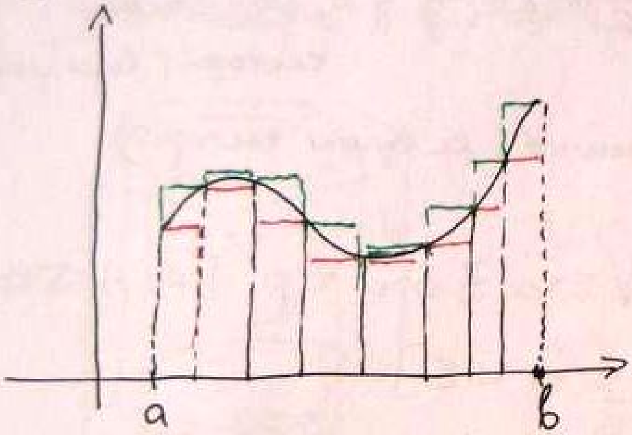
Площа криволінійної трапеції

①

$f(x)\geq 0$, $E=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$

Теорема.

f - інтегр. на $[a,b]$ $\Rightarrow$ E - вимірна $\wedge$ $mE=\int\limits_a^b f(x)dx$



$P\subset E\subset Q$

P, Q - многокутники

$$mP=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\underline{S}(p)$$

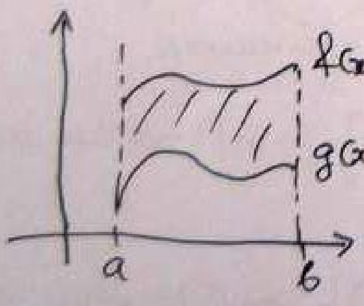
$$mQ=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\overline{S}(p)$$

$$\left.\begin{array}{l} f\text{-інтегр.} \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall p\ [d(p)<\delta \Rightarrow \overline{S}(p)-\underline{S}(p)<\varepsilon] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad mQ-mP<\varepsilon \end{array}\right\}\Rightarrow$$

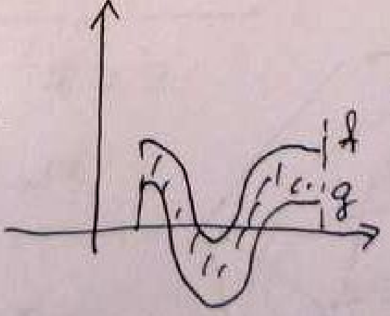
$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ P, Q$ - мног. $P\subset E\subset Q\ [mQ-mP<\varepsilon] \Rightarrow E$ - вим

$$\begin{array}{ccccc} mP & \leq & mE & \leq & mQ \\ \parallel & & & & \parallel \\ \underline{S}(p) & \leq & \int\limits_a^b f(x)dx & \leq & \overline{S}(p) \end{array}$$

$\forall\varepsilon\ mQ-mP<\varepsilon \Rightarrow mE=\int\limits_a^b f(x)dx$



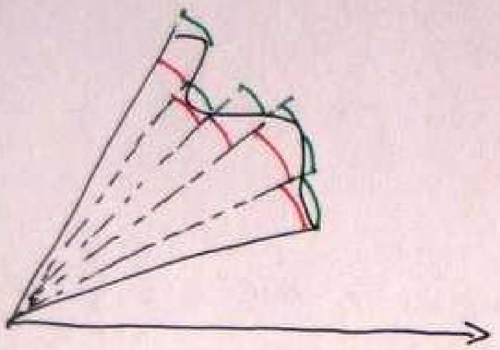
$S=\int\limits_a^b[f(x)-g(x)]dx$



$S=\int\limits_a^b[f(x)-g(x)]dx$

Теорема. $z=z(\varphi)$, $\alpha\leq\varphi\leq\beta$ $E=\{(\varphi,z)\mid\alpha\leq\varphi\leq\beta,\ 0\leq z\leq z(\varphi)\}$

$z(\varphi)$ - інтегр. $[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ E - вимірна $mE=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta[z(\varphi)]^2d\varphi$



$$P \subset E \subset Q$$

$$mP = \frac{1}{2}\sum m_i^2 \Delta\varphi_i = \underline{S}(p)$$

$$mQ = \frac{1}{2}\sum M_i^2 \Delta\varphi_i = \overline{S}(p)$$

$\frac{1}{2} m_i \Delta\varphi_i$, $\frac{1}{2} M_i \Delta\varphi_i$ – площі секторів (вим. множини)

P, Q – вим. множини (як суми секторів)

$r(\varphi)$ – інтегр $[a,b] \Rightarrow \frac{1}{2}r^2(\varphi)$ – інтегр $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall p\ [d(p)<\delta \Rightarrow$

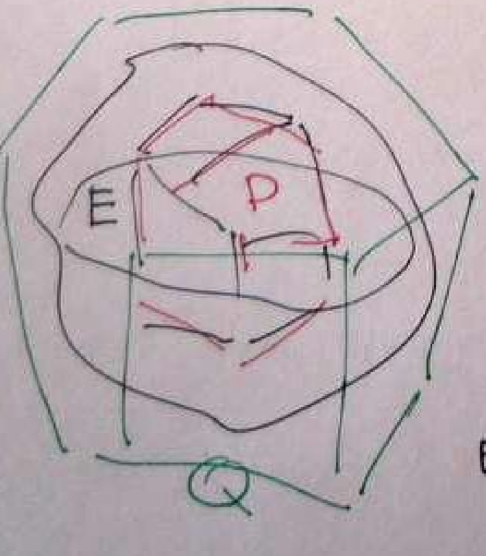
$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow [\overline{S}(p)-\underline{S}(p)<\varepsilon] \\ &\qquad\Downarrow \\ &\quad mQ - mP < \varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\ P, Q$ – вим. $P\subset E\subset Q\ [mQ - mP<\varepsilon] \Rightarrow E$ – вим.

$$\begin{aligned} mP \le\ &mE \le mQ \\ \| \qquad & \qquad\quad \| \\ \underline{S}(p) \le \frac{1}{2}&\int_\alpha^\beta [r(\varphi)]^2 d\varphi \le \overline{S}(p) \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon>0\ mQ - mP < \varepsilon \} \Rightarrow mE = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi$$

Поняття обєму в R^3



$E \subset R^3$, P, Q – многогранники

$m_*E \overset{df}{=} \sup\limits_{P\subset E}\{mP\}$ mP – обєм мног.

$m^*E \overset{df}{=} \inf\limits_{Q\supset E}\{mQ\}$ mQ – обєм. мног.

E – вимірн. $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $m_*E = m^*E = mE$

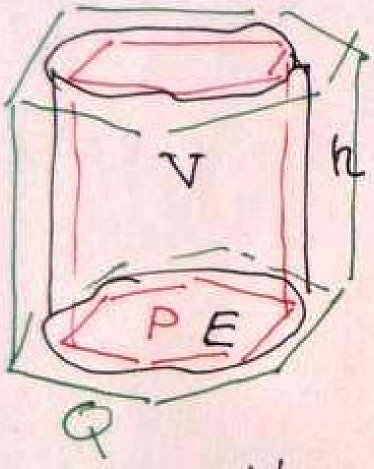
Обчислення об'єму

V - циліндричне тіло

$V = \{ (x,y,z) \mid (x,y)\in E,\ 0<z<h \}$

Теорема.

E - вимірна в $\mathbb{R}^2 \Rightarrow V$ - вим. в $\mathbb{R}^3 \wedge mV = h\cdot mE$



$V_1 \subset V$, V_1 - впис. множ.

$V \subset V_2$ V_2 - опис. множ.

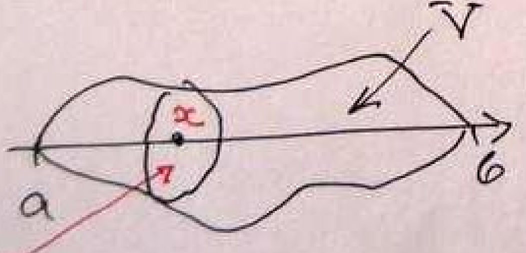
$mV_1 = h\,mP$

$mV_2 = h\,mQ$

$\forall \varepsilon>0\ \exists V_1, V_2\quad V_1\subset V\subset V_2\quad mV_2 - mV_1 = (mQ - mP)h < \varepsilon$

$mV = \sup\{mV_1\} = \inf\{mV_2\}$

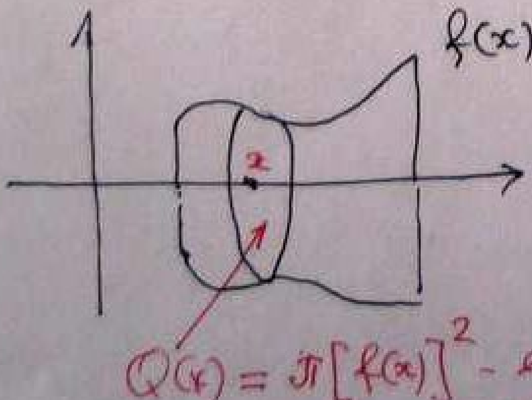
Вираз об'єму через площу поперечного перерізу



Q(x) - площа перерізу

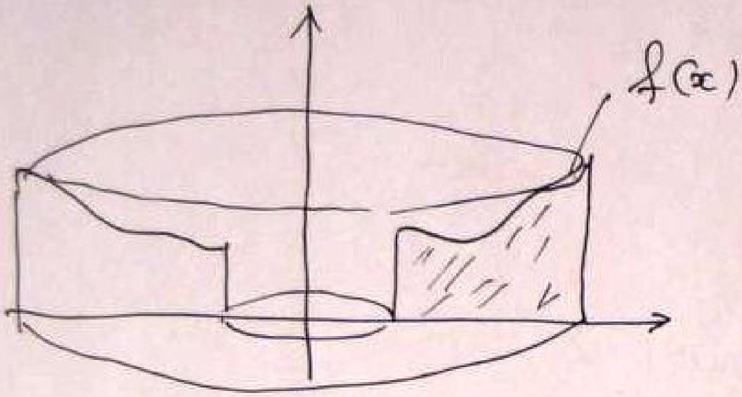
$$mV = \int_a^b Q(x)dx$$

Якщо V тіло обертання



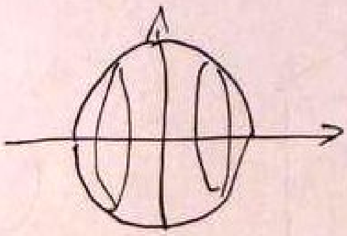
$$mV_{Ox} = \pi\int_a^b [f(x)]dx$$

$Q(x) = \pi[f(x)]^2$ - це площа круга



$$mV_{Oy}=2\pi\int_a^b f(x)\cdot x\,dx$$

Приклад. Об'єм кулі



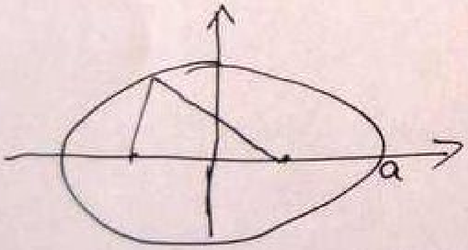
$x^2+y^2=a^2$

$y=\sqrt{a^2-x^2}$

$$mV_{Ox}=\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=$$

$$=\pi\left(a^2x\Big|_{-a}^{a}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{a}\right)=\pi\left(a^3+a^3-\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right)=\pi\frac{4a^3}{3}$$

Площа еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$$S=4\int_0^a\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}dx=$$

$$=4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$x=a\sin t$

$dx=a\cos t\,dt$

$$=\frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2}a\cdot a\cos^2 t\,dt=$$

$$=4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=4ab\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\pi ab$$

Тому $m(E_1 \cup E_2) - (mE_1 + mE_2) \le$
$\le (mQ_1 + mQ_2) - (mP_1 + mP_2) < 2\varepsilon$.

Отже, $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$. ◄

Чи введена нами міра задовільн. властивостям 1 – 4 і міри?

1. $mE \ge 0$ - виконується
2. адитивність - доведено
3. рівність для конгруентних (на основі того, що це викон. для многокутників)
4. $me = 1$ - те саме.

Отже, введена міра Жордана задовільн. властивості 1-4.

Але не всі множини мають міру.
Нехай $A = [0,1] \cap Q$, $A \times A = E$.
$m^*E = \inf\limits_{Q \supset E} \{mQ\} = 1$, $m_*E = \sup\limits_{P \subset E} \{mP\} = 0$ бо ∄ многокутників, вписаних в E.

Площа криволін. трапеції

$f(x) \ge 0 \quad E = \{(x,y) \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$

Теорема. Нехай функція $f: f(x) \ge 0$, f-інтегрована на $[a, b]$. Тоді E - вимірна, $mE = \int_a^b f(x)dx$.

► f-інтегр. → $\forall \varepsilon > 0 \ \exists p: \overline{S}(p) - \underline{S}(p) < \varepsilon$

$\overline{S}(p) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ - сума площ прямокутників, або площа многокутника, описаного навколо E

$\underline{S}(p) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ - площа многокутника, вписаного в E. Отже, ми для $\forall \varepsilon > 0$ знайшли многокутники вписаний і описаний, що $mQ - mP < \varepsilon$. $\rightarrow$

$\rightarrow$ E - вимірна.

$mE = \sup\limits_{Q} mQ = \inf\limits_{P} mP = \sup \overline{S}(P) = \inf \underline{S}(P) =$

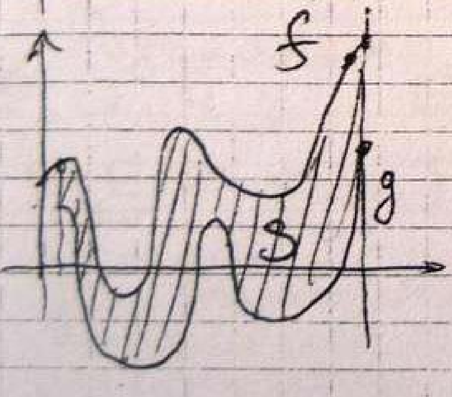
$= I$ - один з критеріїв існування $\int_a^b f(x)dx = I$. ◄

або $mP \le mE \le mQ$
$\underline{S}(P) \le \int_a^b f(x)dx \le \overline{S}(P)$ $\rightarrow (mQ - mP < \varepsilon) \rightarrow$

$\rightarrow |mE - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon \rightarrow$ $mE = \int_a^b f(x)dx$ ▲

Зауваж.

$S = \int_a^b [f(x) + g(x)]dx \}$



$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

Справді, візьмемо

$f_1(x) = f(x) + C$

$g_1(x) = g(x) + C$, так щоб і $g_1(x)$ і $f_1(x)$ були більше за 0.

Тоді $S = \int_a^b [f_1(x) - g_1(x)]dx$.

Площа криволінійного сектора.

Нехай $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$

Розгл. множину $E = \{(\varphi, r) \mid \alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le r \le r(\varphi)\}$

Теорема. Нехай $r(\varphi)$ - інтегр. на $[\alpha, \beta]$. Тоді $mE = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [r(\varphi)]^2 d\varphi$

▶ $r(\varphi)$ - інтегр. $\to \frac{1}{2}[r(\varphi)]^2$ - інтегрована →

→(за критерієм) → $\forall \varepsilon > 0\ \exists p: \overline{S}(p) - \underline{S}(p) < \varepsilon$ для ф-ії $\frac{1}{2}[r(\varphi)]^2$.

$\overline{S}(p) = \sum \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$ - сума площ секторів описаних

$\underline{S}(p) = \sum \frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i$ - сума площ секторів вписаних.

$\frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$ - площа великого сектора

$\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i$ - площа маленького сектора.

$\overline{S}(p)$ - площа описаної вимірної множини

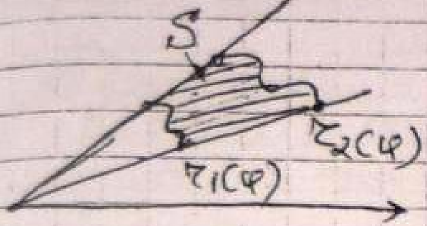
$\underline{S}(p)$ - площа вписаної вимірної множини.

Отже, $\forall \varepsilon > 0\ \exists E_1, E_2$ - вимірні, що $E_1 \subset E \subset E_2$, $mE_2 - mE_1 < \varepsilon$.

Тому E вимірна

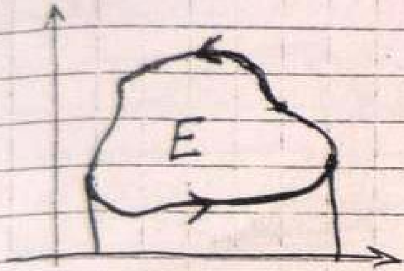
$$\left.\begin{array}{l} mE_1 \le mE \le mE_2 \\ \underline{S}(p) \le \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [r(\varphi)]^2 d\varphi \le \overline{S}(p) \end{array}\right\} \to \left| mE - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [r(\varphi)]^2 d\varphi \right| < \varepsilon \to$$

$$\to mE = \frac{1}{2}\int [r(\varphi)]^2 d\varphi. \quad ◀$$



$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r_2(\varphi)]^2 d\varphi - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r_1(\varphi)]^2 d\varphi.$$

Нехай $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. $a \le t \le b$.



$$(\varphi(a), \psi(a)) = (\varphi(b), \psi(b))$$

$mE = -\int_a^b \psi(t)\varphi'(t)dt$ (проти годинник. стрілки, якщо навпаки, то + .) - Довести самостійно.

Ідея - розбити на 2 куски..

Поняття об'єму

Розглянемо в $\mathbb{R}^3$ многогранники P, Q, R; $E \subset \mathbb{R}^3$

$$m_*E = \sup_{P \subset E}\{mP\}, \quad m^*E = \inf_{Q \supset E}\{mQ\},$$

E вимірна $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $m_* E = m^* E = mE$.

Подальші тв-ння про вимірні множини в $\mathbb{R}^3$ - аналогічні.

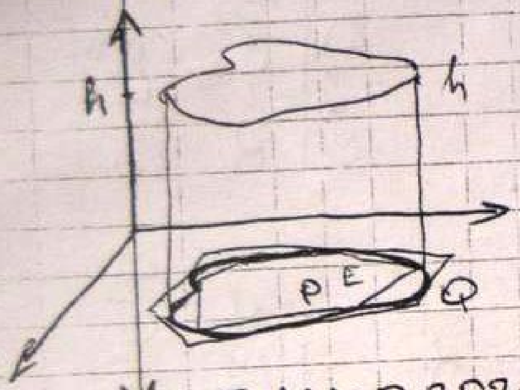
Обчислення об'єму

1° Нехай $E \in \mathbb{R}^2$, $V = \{(x, y, z) | (x, y) \in E, 0 \le z \le h\}$

V - циліндричне тіло

Теорема. E - вимірна в $\mathbb{R}^2$ $\rightarrow$ V - вимірна в $\mathbb{R}^3$, $mV = h \cdot mE$.

▶ E - вимірна $\to \forall \varepsilon > 0\ \exists P, Q$ - многокутники, $P \subset E \subset Q \wedge mQ - mP < \varepsilon$.



Розгл. V_1 - призма з основою P і висотою h, V_2 - призма з основою Q і висотою h.

Тоді ~~A~~ V_1 - многогранник, вписаний у V, V_2 - многогранник, описаний навколо V.

Тоді $mV_1 = h \cdot mP$, $mV_2 = h \cdot mQ$.

$$mV_2 - mV_1 = h\,mQ - h\,mP = h(mQ - mP) < h \cdot \varepsilon.$$

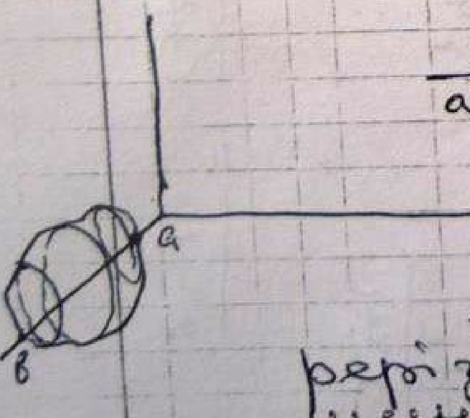
Отже, $\forall \varepsilon > 0\ \exists V_1, V_2$ - многогранники: $V_1 \subset V \subset V_2$, $mV_2 - mV_1 < h\varepsilon$. Це критерій вимірності.

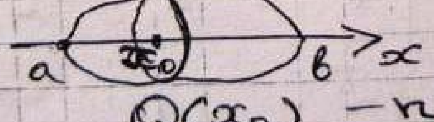
$(mE/?)$

$$mV = \sup mV_1 = \inf mV_2 = h \cdot mE$$ ◀

2° Вираж. Об'єму через площу поперечного перерізу.

$V \subset \mathbb{R}^3$





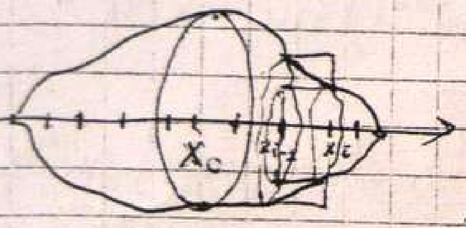
$Q(x_0)$ - площа перерізу V площиною $x = x_0$

Припущення: припускаємо, що проекції перерізів тіла ~~об~~ на площину Oz - концентричні

Нехай $Q(x)$ - непер.

Теорема. Якщо для множини V, $Q(x)$ - непер. на $[a, b]$, то V - вимірна, $mV = \int_a^b Q(x)dx$.

▶ $Q(x)$ - непер $\rightarrow$ Q - інтегрована, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists p$: $\sum M_i \Delta x_i - \sum m_i \Delta x_i < \varepsilon$



M_i - переріз найбільшої площі, m_i - площа найменшого перерізу.

$M_i \Delta x_i$ - об'єм циліндра

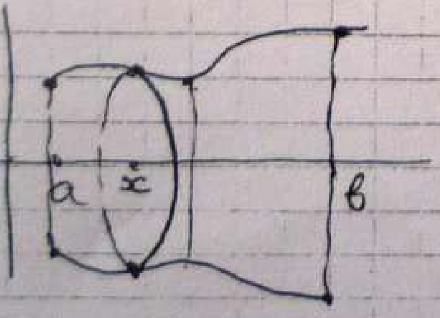
Тоді $\sum M_i \Delta x_i$ - сума об'ємів циліндрів = об'єм ~~ов~~ описаних навколо тіла циліндрів.

~~ΣV~~ $\sum m_i \Delta x_i$ = об'єм вписаних у V циліндрів.

За критерієм вимірності V - вимірна.

$$\left.\begin{array}{l} \sum m_i \Delta x_i \le mV \le \sum M_i \Delta x_i \\ \underline{S}(p) \le \int_a^b Q(x)dx \le \overline{S}(p). \end{array}\right\} \rightarrow mV = \int_a^b Q(x)dx. \blacktriangleleft$$

V - тіло обертання

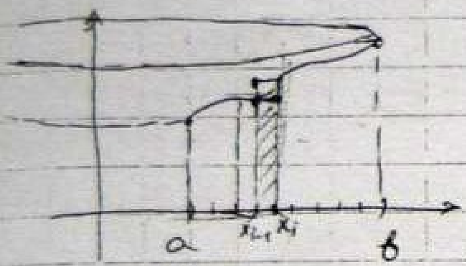


$Q(x) = [f(x)]^2 \cdot \pi \rightarrow$

$\rightarrow V_{Ox} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

Об'єм обертання навколо вісі Oy

Розгл. $f(x)$ – інтегрована на $[a, b]$, $f(x) \geq$



Розгл. V – тіло обертання криволін. трапеції навколо вісі Oy

Розгл. деяке розбиття P $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Через M_i позначимо $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$,

$$m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Розглянемо об'єм обертання i-тої площадки:

$V_i \; \pi M_i x_i^2 - \pi M_i x_{i-1}^2 = \pi M_i (x_i^2 - x_{i-1}^2)$ – об'єм обертання i-ого великого прямок.

$v_i = \pi m_i (x_i^2 - x_{i-1}^2)$ – об'єм оберт. вписаної площадки

Розгл. $mQ = \pi \sum\limits_{i=1}^{n} M_i (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \pi \sum\limits_{i=1}^{n} M_i (x_i + x_{i+1}) \Delta x_i$ – об'єм множини Q, описаної навколо V

$mP = \pi \sum\limits_{i=1}^{n} m_i (x_i + x_{i-1}) \Delta x_i$ – об'єм множини P, вписаної у V.

V – вимірна → треба показати, що $mQ - mP < \varepsilon$ $\forall \varepsilon$.

$x_i > 0$.

$$mQ - mP = \pi \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i + x_{i-1}) \Delta x_i \leq$$
$$\leq 2b\pi \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i < \varepsilon \cdot 2\pi \cdot b \; (S\text{ - інтегр.})$$

Скорист. критерієм: V-вим. $\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists P, Q$ $P \subset V \subset Q$, $mQ - mP < \varepsilon$

Візьмемо $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Розгл. $\sigma(p,\xi) = 2\pi \sum f(\xi_i)\cdot \xi_i \Delta x_i$

$mP \le \sigma(p,\xi) \le mQ$ $\sigma(p,\xi)$ - інтегральна сума.

$mP \le mV \le mQ$. Звідси отримуємо, що $\forall \varepsilon > 0 \ \exists p_\delta : |mV - \sigma(p,\xi)| < \varepsilon$. →

→ $\lim\limits_{d(p)\to 0} \sigma(p,\xi) = \int_a^b 2\pi f(x)\cdot x\,dx$, бо $f(x)\cdot x$ - інтегрована. Тому $mV = 2\pi\int_a^b f(x)x\,dx$

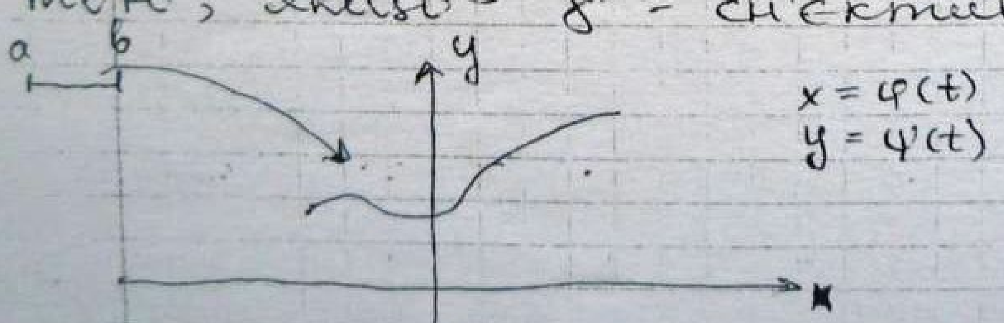
Довжина кривої

Поняття про криву.

Озн. Параметризованою кривою будемо називати ф-ю $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t)(\varphi(t),\psi(t))$. Якщо φ і ψ - неперер., то γ - неперервна, якщо φ, ψ - дифер., то γ - дифер., якщо φ' і ψ' - неперер., то γ - неперервно диференційована.

Параметриз. крива зветься простою, якщо γ - ін'єктивна.



Проста крива не має самоперетинів, бо різним t відповідають різні точки.

Крива замкнута, якщо $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Лекція 10

Темами лекції будуть:

Поняття про криву

Довжина кривої

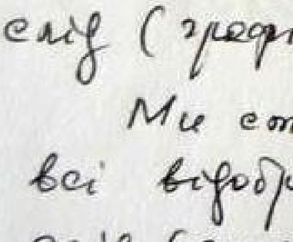
Площа поверхні обертання

Спочатку розглянемо основні означення.

Поняття про криву. Довжина кривої.

При обговоренні поняття кривої виникає питання: Що ми розуміємо під кривою – той геометричний слід (множину), чи відображення (функція, рівняння). Виявляється, що „різні" відображення (~~рівняння~~ функції) можуть мати той самий слід (графік). Це подано в конспекті.

Ми стараємося показати: як об'єднати всі відображення, які мають однаковий слід (графік). І тоді під кривою розуміємо клас всіх відображень з однаковим слідом. Цей шлях веде через поняття: параметризована крива, відношення еквівалентності, клас еквівалентних параметризованих кривих, крива. В подальшому в конспекті прикладі параметризовані криві $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ мають один слід (графік), і вони є різними параметризаціями однієї кривої (γ)



[це так само як число 0,5 має різні зображення 1/2, 2/4, 3/6, і т.д]

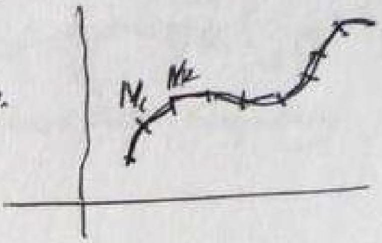
Далі є два важливих моменти.

I Означення довжини кривої.

Тут ми йдемо шляхом означення довжини кола, як границі вписаного многокутника.

В параметрично задану криву вписуємо ламану

Довжину ламаної позначимо через $L(p)$ p-розбиття, $d(p)$-діам. розбиття



Означення. L-довжина $= \lim\limits_{d(p)\to 0} L(p)$

Тобто довжина кривої дорівнює границі довжин ламаних при прямуванні діам. розбиття до нуля.

Зауважимо, що при $d(p)\to 0$ довжини ланок ламаної $\to 0$.

II Доведення формули обчислення довжини кривої.

Записавши суму відстаней між точками M_{i-1}, M_i ламаної і застосувавши формулу Лагранжа ми отримаємо (пропущено φ', ψ')

$$L(p)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tilde{\tau}_i)]^2}\,\Delta t_i$$

точки $\tau_i, \tilde{\tau}_i$ - різні! в $[t_{i-1}, t_i]$

Тепер $L=\lim\limits_{d(p)\to 0} L(p)=\lim\limits_{d(p)\to 0}\sum\limits_{i-1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tilde{\tau}_i)]^2}\,\Delta t_i$

Якщо би $\tau_i=\tilde{\tau}_i$ були рівними, то це була б інтегральна і границя дорівнювала $\int\limits_a^b\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$ і формула була б доведена.

(Якщо хтось так пропустить і закінчить доведення. Це ПГУ, але можна!)

Далі йде обґрунтування того, що так можна зробити! Доводиться що заміна $\tilde{\tau}_i$ на τ_i не (суттєво) впливає на границю $L(p)$.

(розберіть!) Розгляньте формули обчислення довжини кривої при різному заданні її.

Площа поверхні обертання.

Питання як „плоскими" квадратами виміряти площу „викривленої" поверхні є не простим. Тут також „проситься" ідея наближувати поверхню многогранниками, як у випадку площі сфери. У загальному випадку це питання буде розглядатися в наступному семестрі.

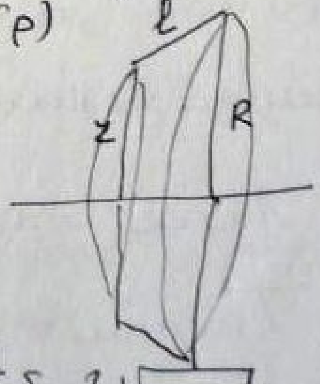
У нас простіший випадок. Поверхня яку ми розглядаємо є поверхнею обертання деякої кривої. Тому означення площі поверхні обертання ми дамо так.

1°. Вписуємо для кривої ламану, яка складається з n ланок.

2°. Обертаємо ламану навколо осі OX.

3°. Кожна ланка ламаної описує бічну поверхню зрізаного конуса, або бічну поверхню циліндра (у випадку, якщо ланка ∥ OX).

4°. Додаємо площі поверхонь обертання всіх ланок. Це позначаємо S(P)



Вправа. Маємо зрізаний конус. Бічна поверхня його дорівнює $=2\pi l\frac{r+R}{2}$

Звідси і отримуємо $S(P)=\pi\sum_{i=1}^{n}[\ \ ]\sqrt{\ \ }$

Далі. Означення. $S=\lim\limits_{d(P)\to 0}S(P)$

Зводимо S(P) до інтегральної суми (як і у випадку довжини дуги). Але тут знову в сумі є різні $t_i, \tau_i, \tilde{\tau}_i$. Якщо б вони були рівні, то границя (як інтегральної суми) була б рівна інтегралу.

Щоб дійти до інтегральної суми ми
щось додаємо і теж віднімаємо і
показуємо, що те зайве приведе до нуля.

Розгл. $\sigma(p,\xi) = 2\pi \sum f(\xi_i)\cdot \xi_i \Delta x_i$

$mP \le \sigma(p,\xi) \le mQ$ $\quad \sigma(p,\xi)$ - інтегральна сума.

$mP \le mV \le mQ$. Звідси отримуємо, що $\forall \varepsilon>0\ \exists p_\delta : |mV - \sigma(p,\xi)| < \varepsilon$. →

→ $\lim\limits_{d(p)\to 0} \sigma(p,\xi) = \int_a^b 2\pi f(x)\cdot x\,dx$, бо $f(x)\cdot x$ - інтегрована. Тому $mV = 2\pi\int_a^b f(x) x\,dx$

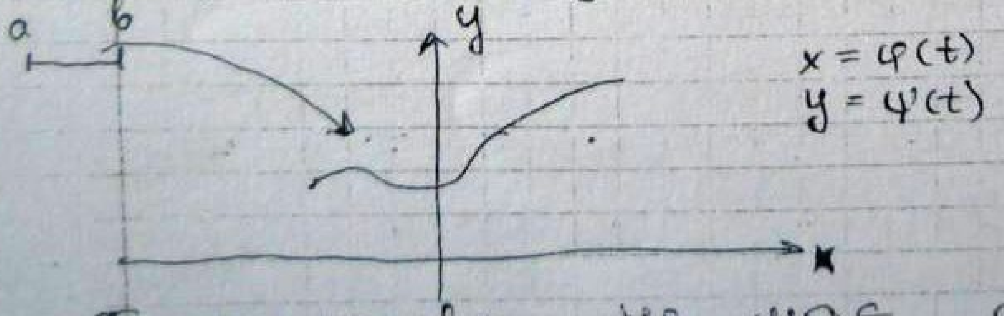
Довжина кривої

Поняття про криву.

Озн. Параметризованою кривою будемо називати ф-ю $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t)(\varphi(t), \psi(t))$. Якщо φ і ψ - непер., то γ - неперервна, якщо φ, ψ - дифер., то γ - дифер., якщо φ' і ψ' - непер., то γ - неперервно диференційована.

Параметриз. крива зветься простою, якщо γ - ін'єктивна.



Проста крива не має самоперетинів, бо різним t відповідають різні точки

Крива замкнута, якщо $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Нехай Γ - множина неперервно-диференційованих простих параметриз. ~~кривих~~ кривих $\Gamma = \{\gamma(t)\}$.

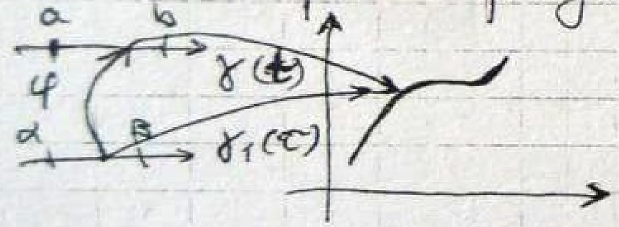
В ній введемо відношення $\sim$:

$\gamma \sim \gamma_1 \overset{def}{=} \exists \varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, φ - $\overset{строго}{монотонна}$ і непер. диференційована, що $\gamma \circ \varphi = \gamma_1$

Виявляється, що $\sim$ - 1. рефлексивне (можна взяти $\varphi(t) = t$) 2. симетричне ($\exists\, \varphi^{-1}$) 3. транзитивне.

Розгл. $\Gamma/\sim$.

<u>**Означ**</u> Простою кривою називаємо клас параметризованих кривих по віднош. $\sim$



Пр-д. $\gamma_1 \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ $\gamma_2 \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$\gamma_3 \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$ $0 \le t \le 1$ $\gamma_4 \begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2} \\ y = t \end{cases}$ $0 \le t \le 1$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ - р-ння однієї і тієї ж кривої.

$\gamma([a, b]) =$ ~~$\gamma[$~~ $[\gamma]$ - слід параметриз. кривої.

Всі кривіз що належ. до одного і того самого класу мають той самий слід.

(γ) - клас параметриз. кривих.

Поняття про довжину кривої. Формули обчислення.

Нехай (γ) – неперервно дифер. крива,

$\gamma(t)(\varphi(t), \psi(t))$ – деяка параметризація.
$t \in [a, b]$

Розгл. розбиття p $a = ~~t_0~~ < \ldots < t_n = b$.
Розгл. точки $(\varphi(t_i), \psi(t_i)) \subset [\gamma]$. Візьмемо ламану, побуд. по цих точках
$l(p)$ – її довжина.

$$l(p) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}$$

Означ. Довжиною кривої (γ) будемо називати $\lim\limits_{d(p)\to 0} l(p) = l$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall p\ [d(p) < \delta \to |l - l(p)| < \varepsilon].$$

Отримаємо ф-лу для обчисл. довжини

φ, ψ – дифер. $\to$ за т. Лагранжа

$$l(p) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + \psi(\tilde{\tau}_i)^2}\,\Delta t_i \qquad \tau_i, \tilde{\tau}_i \in [t_i, t_{i-1}].$$

Доведемо нерівність:

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}\right| = \left|\frac{(a-c)(a+c) + (b-d)(b+d)}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}}\right| \leq$$

$$\leq |a-c| \underbrace{\frac{|a|+|c|}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}}}_{\leq 1} + |b-d| \underbrace{\frac{|b|+|d|}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}}}_{\leq 1} \leq |a-c| + |b-d|.$$

Отже,
$$l(p) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\tau_i))^2}\,\Delta t_i +$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\tilde{\tau}_i))^2} - \sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\tau_i))^2}\right)\Delta t_i}_{= A} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\tau_i))^2}\, \Delta t_i + A.$$

Ф-ії φ і ψ - неперервно діфер., ф-ія $\sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\tau_i))^2}$ - інтегрована, тому

$$\lim_{d(p)\to 0} l(p) = \lim_{d(p)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\tau_i))^2}\, \Delta t_i + \lim_{d(p)\to 0} A.$$

Треба показати, що $\lim\limits_{d(p)\to 0} A = 0$.

Скористаємось доведеною нерівністю

$$|A| \leq \sum_{i=1}^{n} |\psi'(\tau_i) - \psi'(\tilde{\tau}_i)|\, \Delta t_i + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\tilde{\tau}_i)|}_{=0}$$

ψ' - непер на $[a, b] \to$ рівн. непер. $\to$

$\to \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall p\ [d(p) < \delta \to |\tau' - \tau''| < \delta \to$

$\to |\psi(\tau') - \psi(\tau'')| < \varepsilon$.

Тому $|A| < (b - a)\varepsilon$. Отже,

$\lim\limits_{d(p)\to 0} A = 0$

Коли маємо явне задання $y = f(x)$, ~~то~~ отримаємо

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

параметрично:

$$l = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(x)]^2 + [\psi'(x)]^2}\, dx.$$

в полярній с-мі:

$x = r(\varphi) \cos \varphi$, $y = r(\varphi) \sin(\varphi)$.

$x'_\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$

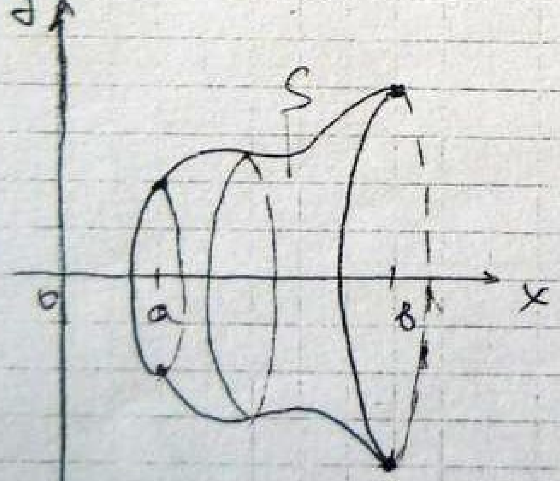
$y'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi.$

$[x'_\varphi]^2 + [y'_\varphi]^2 = (r')^2 + (r)^2.$

Тому $l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\, d\varphi.$

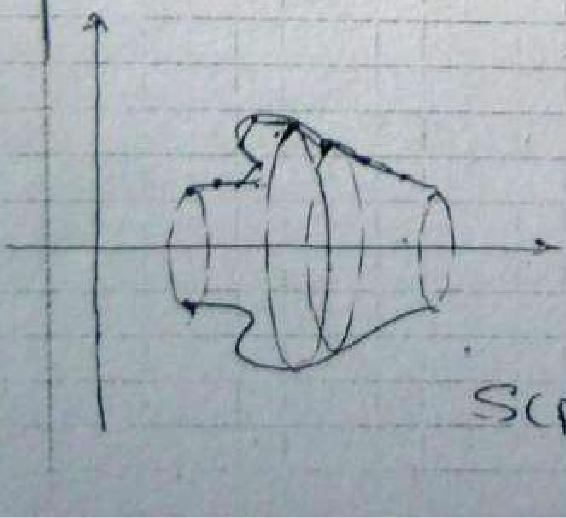
Площа поверхні обертання

Нехай задано деяку криву $y = f(x)$
$x \in [a, b]$ $f(x) > 0$



Розгл. (γ) – неперервно дифер.

$\gamma(t)(\varphi(t), \psi(t))$ – довільна параметризація. $t \in [a, b]$



Розгл. $\forall p$ $a_0 = t_0 < \ldots < t_n = b$
Розгл. точки $(\varphi(t_i), \psi(t_i))$, побудуємо ламану

Позначимо через $S(p)$ площу обертання

Лекція 11

Невластиві інтеграли

[redacted]

При визначенні поняття означеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ важливим є те, що:

1) $[a,b]$ – скінченний відрізок

2). функція $f(x)$ обмежена на $[a,b]$

Природнім є питання: як дати означення інтеграла від необмежених функцій чи по необмеженому проміжку? Це питання розглянемо у цьому розділі.

I Невластиві інтеграли по необмеженому проміжку

Нехай функція $f:[a,+\infty[\to R$, f-інтегровна на $\forall\,[a,b]\subset[a,+\infty[$

Означення 1. $$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

Приклад 1.

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\left[\operatorname{arctg} x\,\Big|_0^A\right] = \lim_{A\to+\infty}\left[\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 0\right] = \frac{\pi}{2}$$

Якщо в означенні 1 існує скінченна границя, то кажуть що інтеграл збіжний, в протилежному випадку — розбіжний.

Приклад 2.

$$p\neq1 \quad \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^A = \lim_{A\to\infty}\left[\frac{A^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right] = \begin{cases} p>1 & \text{гр. існує}\\ p<1 & \text{гр. неісн}\end{cases}$$

$$p=1. \quad \int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty}\ln|x|\,\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty}\left[\ln|A|-\ln 1\right] = \text{границя не існує}$$

Отже $$\boxed{\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\text{збіжний при } p>1\\ \text{розбіжний при } p\le 1\end{cases}}\ !$$

наприклад $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ - збіжний. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ - розбіжний

Властивості невластивих інтегралів

1. $\int_a^\infty f(x)dx$ – збіжний $\Leftrightarrow$ $\forall b>a$, $\int_b^\infty f(x)dx$ – збіжний

Доведення.

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\left(\int_a^b f(x)dx + \int_b^A f(x)dx\right)$$

З існування границі в лівій частині випливає існування границі справа і навпаки.

2. $\int_a^\infty f(x)dx$ – збіжний $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{A\to\infty}\int_A^\infty f(x)dx = 0$

Доведення.

$$\left.\begin{aligned}\int_a^\infty f(x)dx &= \int_a^A f(x)dx + \int_A^\infty f(x)dx\\ \int_a^\infty f(x)dx &= \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx\end{aligned}\right| \Leftrightarrow \lim_{A\to\infty}\int_A^\infty f(x)dx = 0$$

3. Якщо $\int_a^\infty f(x)dx$ – збіжн. і $\int_a^\infty g(x)dx$ – збіжн. $\Rightarrow$

$$\int_a^\infty[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^\infty f(x)dx+\beta\int_a^\infty g(x)dx.$$

Доведення. В рівності перейдемо до границі $A\to+\infty$

$$\int_a^A[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^A f(x)dx+\beta\int_a^A g(x)dx$$

2. Невластиві інтеграли від додатніх функцій

Спочатку розглянемо властивості інтегралів від додатніх функцій

Теорема 1. Нехай $\forall x\in[a,+\infty[$ $f(x)\geq 0$. Тоді

$$\int_a^\infty f(x)dx - \text{збіжний} \Leftrightarrow \int_a^A f(x)dx = \Phi(A) - \text{обмежена зверху}$$

Доведення випливає з того, що $\Phi(A)$ – монотонна функція (оскільки $f(x)\geq 0$). А монотонна функція (зростаюча) має границю, якщо вона обмежена зверху

Теорема 2. (Ознака порівняння)

Нехай $\forall x \in [a, +\infty[\quad f(x) \geq 0 , \; g(x) \geq 0$

1°. $\forall x \in [a, \infty[\; [f(x) \leq g(x)] \Rightarrow$

$\int_a^\infty g(x)dx$ - збіжний $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ - збіжна

$\int_a^\infty f(x)dx$ - розбіжний $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx$ - розбіжний

2°.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq K < \infty & \int_a^\infty g(x)dx \text{ - зб.} \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx \text{ - збіж.} \\ 0 < K \leq \infty & \int_a^\infty f(x)dx \text{ - зб.} \Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx \text{ - збіж.} \end{cases}$$

(тобто при $0 < K < \infty$, обидва інтеграли ведуть себе однаково (збіжні або розбіжні))

Доведення. 1° ~~Нехай~~ [illegible], $\int_a^A f(x)dx = \Phi(A)$, $\int_a^A g(x)dx = G(A)$

З умови $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \Phi(A) \leq G(A)$

Якщо $\int_a^\infty g(x)dx \xRightarrow{T.1} G(A)$ - обм. $\overset{\Downarrow}{\Rightarrow} \Phi(A)$ - обм. $\xRightarrow{T.1} \int_a^\infty f(x)dx$ - збіж.

2°. Нехай $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K < \infty \overset{df}{=}$

$\overset{df}{=} \forall \varepsilon = 1 \; \exists A_0 \; \forall x > A_0 \; \left[K - 1 < \frac{f(x)}{g(x)} < K+1 \right]$

значить $\forall x > A_0 \quad f(x) < (K+1) g(x)$

Тоді $\int_a^\infty g(x)dx$ - збіг. $\Rightarrow \int_{A_0}^\infty g(x)dx$ - збіг. $\Rightarrow \int_{A_0}^\infty (K+1) g(x)dx$ - збіг. $\Rightarrow$

$\int_{A_0}^\infty (K+1) f(x)dx$ - збіг. $\Rightarrow \int_a^\infty (K+1) f(x)dx$ - збіг. $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ - збіг.

В кожній імплікації використовуємо раніше доведені властивості.

У випадку $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \; (0 < K \leq \infty) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{K} \; (0 \leq \frac{1}{K} < \infty)$

і застосовуємо раніше доведений випадок.

ознаки. Для порівняння будемо використовувати

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p},\ a>0$$

Дослідити на збіжність $\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^4+x^2+2} = \int_1^\infty f(x)dx$

Для порівняння візьмемо $g(x)=\frac{1}{x^3}$

Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^4+x^2+2} = 1 = K \quad \int_1^\infty\frac{dx}{x^3} \text{ - збіжний } p=3>1$$

отже наш і-л збіжний.

Дослідити на збіжність

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx,\quad f(x)=\frac{\ln x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}}$$

Оцінимо функцію $\frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}}$. Для цього розглянемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{1/4}} = (\text{правило Лопіталя}) = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^{1/4}} = 0$$

Це означає, що з деякого моменту $x>A_0$

$$\frac{\ln x}{x^{1/4}}<1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} < \frac{1}{x\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{x^{1+1/4}}.$$

Зі збіжності $\int_1^\infty\frac{dx}{x^{1+1/4}}$ - за п. 1 одержуємо $\int_1^\infty\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx$ - збіжн

Запам'ятайте! Так само можна показати

$\int_1^\infty\frac{\ln x}{x^p}dx$ - збіжний при $p>1$. $\Big(\frac{\ln x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}\cdot\frac{\ln x}{x^\varepsilon}$

$p>1,\ \exists\varepsilon\ p-\varepsilon>1$

Зробіть це!

Критерій Коші збіжності невластивих інтегралів
Абсолютна і неабсолютна збіжність

В першому семестрі ми розглянули критерій Коші існування границі функції (пряму перевірку конечності) Надалі для всіх понять, які визначаються через поняття границі, ми будемо розглядати критерії Коші їх існування.

Нехай $f(x)$ - довільна ф-ія на $[a, +\infty[$

За означенням

$$\exists \int_a^\infty f(x)dx \overset{df}{=} \exists \lim_{A\to\infty} \underbrace{\int_a^A f(x)dx}_{\Phi(A)} = \exists \lim_{A\to\infty} \Phi(A) \overset{\text{крит. Коші}}{=}$$

$$= \forall \varepsilon>0 \ \exists A_0 \ \forall A_1, A_2 > A_0 \ [|\Phi(A_2) - \Phi(A_1)| < \varepsilon]$$

$$\left| \int_a^{A_2} f(x)dx - \int_a^{A_1} f(x)dx \right| = \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Отже, отримали

<u>Критерій Коші</u> збіжності

$$\exists \int_a^\infty f(x)dx \text{ - зб.} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists A_0 \ \forall A_1, A_2 \left[A_1 > A_0 \wedge A_2 > A_0 \Rightarrow \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| < \varepsilon \right]$$

Означення 2

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ - збіг. абсол. } \overset{df}{=} \int_a^\infty |f(x)|dx \text{ - збіжний}$$

Означення 3.

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ - збігається не абсол. } \overset{df}{=} \int_a^\infty f(x)dx \text{ - збіж.} \wedge \int_a^\infty |f(x)|dx \text{ - розб.}$$

Теорема. Якщо $\int_a^\infty |f(x)|dx$ - збіжн., то $\int_a^\infty f(x)dx$ - збіжний

Доведення випливає з критерію Коші і нерівності

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| \le \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx \right| \quad \left(\text{Подумайте і доведіть!} \right)$$

! Але навпаки не вірно! (Це ми покажемо в кін. розд.)

Важливий приклад.

$\int_0^\infty \sin x\,dx$ - розбіжний. Дійсно $\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \sin x\,dx =$

$$= \lim_{A\to\infty} -\cos x \Big|_0^A = \lim_{A\to\infty} (1 - \cos A) = 1 - \underset{\uparrow}{\lim_{A\to\infty} \cos A}$$

границя не існує

аналогічно $\int_a^\infty \cos x\,dx$ - розбіжний.

Висновок з попередньої теореми:

При дослідженні на збіжність $\int_a^\infty f(x)dx$, де $f(x)$ - функція довільна

Якщо ми доведемо збіжність інтеграла $\int_a^\infty |f(x)|dx$ (за ознакою порівняння) то отримаємо збіжність $\int_a^\infty f(x)dx$. У випадку, якщо $\int_a^\infty |f(x)|dx$ - розбіжний, може бути що $\int_a^\infty f(x)dx$ буде збіжним. Потрібні дальші дослідження.

Для дослідження на збіжність інтегралів від довільних функцій є ознаки Абеля і Діріхле.

Нехай підінтегральна функція є добутком двох функцій, тобто $\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)dx$ (1), f, g, f', g' - неперер. $g(x)$ - монотон.

Ознака Абеля. Якщо f', g', f, g - неп. $g(x)$ - мон., то

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \int_a^\infty f(x)dx \text{ - збіжн.} \\ 2.\ g(x) \text{ - моноt. і обм.} \end{array}\right\} \Rightarrow (1) \text{ - збіжний}$$

Ознака Діріхле   Нехай $\Phi(A)=\int_a^A f(x)dx$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \Phi(A) \text{ - обмежена} \\ \quad \exists L \quad \forall A\in[a,+\infty[\quad |\Phi(A)|\le L \\ 2.\ g(x) \text{ - монот., } g(x)\to 0 \text{ при } x\to\infty \end{array}\right\} \Rightarrow (1) \text{ збіжний,}$$

Приклад. Дослідити на збіжність $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$

$\int_1^\infty \underbrace{\sin x}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)}dx$, Застосуємо ознаку Діріхле.

$$\left|\int_1^A \sin x dx\right| = |\cos 1 - \cos A| \le 2 \ (\text{бо } |\cos x|<1)$$

$g(x)=\frac{1}{x}$ - монот. $\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$.

Отже $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ - збіжний, Аналогічно можна показати, що $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$ - збіжний при $p>0$.

Але $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^p}\right|dx$ при $p\le 1$ не є збіжним.

Тобто $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}$ при $p \le 1$ не є абсолютно збіжним.

Доведемо це для $p=1$.

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx \ge \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}dx =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x}}_{\text{розбіжний}} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx}_{\text{збіжний за озн. Діріхле (поясніть!)}}, \text{ — розбіжний} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx \text{ - розбіжний.}$$

Ще означення.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{a} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}}\int_{-B}^{A} f(x)dx$$

Властивості цих інтегралів аналогічні доведеним.
Можна користуватися формулою Н-Л.

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(\infty) - F(a)$$

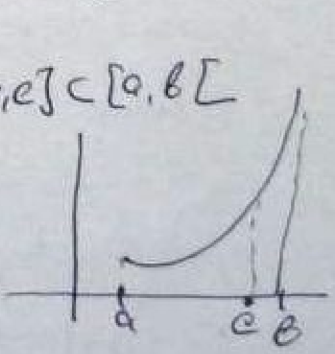
де $F(x)$ - первісна, а $F(\infty) = \lim_{A\to\infty} F(A)$

II Інтеграли від необмежених функцій

Розглянемо випадок інтегралів від необмежених функцій. Точки, в околі яких функція $f(x)$ є необмеженою, можуть бути на кінцях інтервалу $]a,b[$, або в інтервалі.

Нехай $f: [a,b[\to \mathbb{R}$, f-інтегровна в $[a,c] \subset [a,b[$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx$$



аналогічно $f(x)$ - необм. в $U(a)$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^{b} f(x)dx - \lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)dx$$

аналогічно $f(x)$ - необм. в $U(c)$, $c \subset]a,b[$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \eta\to 0}}\int_{a+\eta}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Важливі приклади.

$p\neq 1.$ $\int_0^a \frac{dx}{x^p} = \lim_{\eta\to 0}\int_\eta^a \frac{dx}{x^p} = \lim_{\eta\to 0}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_\eta^a = \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{1-p}\left[a^{1-p}-\eta^{1-p}\right] =$

$= \begin{cases} p>1 & \text{границя не існує} \\ p<1 & \text{границя існує} \end{cases}$

$p=1$ $\int_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to 0}\int_\eta^a \frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to 0}\ln|x|\Big|_\eta^a = \lim_{\eta\to 0}\left[\ln|a|-\overset{\infty}{\ln|\eta|}\right] =$ границя не існує

! $\boxed{\int_0^a \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{збіжний при } p<1 \\ \text{розбіжний при } p\geq 1 \end{cases}}$

Аналогічний приклад

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \begin{cases} \text{збіжний при } p<1 \\ \text{розбіжн. при } p\geq 1 \end{cases}$

$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} \text{зб. при } p<1 \\ \text{розб. при } p\geq 1 \end{cases}$

Невластиві інтеграли від необмежених функцій мають аналогічні властивості, які доведені раніше для інтегралів по необмеженому проміжку.

Для дослідження збіжності також застосовуються ознаки порівняння та ознаки Абеля і Діріхле.

Для порівняння використовуються вище розглянуті інтеграли. Це ви побачите в задачах „Завдання 16".

Для глибшого вивчення цієї теми прочитайте рекомендовані в методичних вказівках підручники.

Лекція 12

Невластиві інтеграли

Дослідження на збіжність

1°. f, g – додатні
  - ознаки порівняння

2°. функції довільні
  - ознака Абеля
  - ознака Діріхле

Для інтегралів $\int_a^\infty f(x)dx$ порівняння з $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} p>1 \text{ зб.} \\ p\le 1 \text{ розб.} \end{cases}$

для необм. ф-ій порівняння з

$$\int_0^a \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} p<1 \text{ зб.} \\ p\ge 1 \text{ розб.} \end{cases} \qquad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} \text{ і } \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} p<1 \text{ зб.} \\ p\ge 1 \text{ розб.} \end{cases}$$

Ознаки Абеля і Діріхле для $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$

Абеля
1. $\int_a^\infty f(x)dx$ – зб.
2. $g(x)$ – мон. обм.

Діріхле
1. $\left|\int_a^A f(x)dx\right|$ – обм.
2. $g(x) \xrightarrow{\text{мон.}} 0$

$\Rightarrow \int_a^\infty f(x)g(x)dx$ – зб.

Приклади.

1. $\int_1^\infty \cos 3x\,dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int_1^A \cos 3x\,dx = \lim\limits_{A\to\infty} \frac{\sin 3x}{3}\Big|_1^A = \lim\limits_{A\to\infty}\left(\frac{\sin 3A}{3} - \frac{\sin 3}{3}\right)$ – розб.

2. $\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^3+x+2}$ – зб. $\quad \frac{x}{x^3+x+2} \le \frac{1}{x^2} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ – збіж.

Відп. За озн. порівн. наш інт. зб.

3. $\int_2^\infty \frac{(x^2+1)dx}{x^4-x^2-5}$ – зб. $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^4-x^2-5}}{1/x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4+x^2}{x^4-x^2-5} = 1$

4. $\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_e^\infty \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_e^\infty = 1$ – зб.

5. $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx \qquad \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1+1/4}} \cdot \overset{<1}{\boxed{\frac{\ln x}{x^{1/4}}}} < \frac{1}{x^{5/4}} \qquad \int_2^\infty \frac{dx}{x^{5/4}}$ ← збіж.

↑ збіж. $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/4}} = \lim \frac{1/x}{1/4\, x^{1/4-1}} = \lim \frac{4}{x^{1/4}} = 0$

6. $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

$x \to 1$ $\quad \frac{1}{x\sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$ $\quad p<1$ збіж.

$x \to \infty$ $\quad \frac{1}{x\sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}$ $\quad p>1$ зб.

7. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ $\quad \frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{1}{x^p}$ $\quad p>1$ – збіж.

$q>0$

8. $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$, $p>1$ $\quad \frac{\ln x}{x^p} = \overset{<1}{\left(\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}\right)} \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}$, $p-\varepsilon>1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim \frac{1/x}{p\, x^{p-1}} = \dots = 0,$$

9. $\int_2^{\infty} x^p e^{-x} dx$ $\quad x^p e^{-x} = \frac{x^p}{e^x} < \frac{x^p}{x^{p+2}} < 1/x^2$ $\quad e^x > x^q$ $\forall q>0$

збіж.

10. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}$$

$x \to 0$ $\quad \frac{\sin x}{x^p} \sim \frac{x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}}$ $\quad p-1<1$, $p<2$, $\boxed{\text{збіж}}$

$x \to \infty$ абсол. зб. $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$, $\quad \frac{|\sin x|}{x^p} < \frac{1}{x^p}$ $\quad p>1$ – $\boxed{\text{збіжн.}}$

не абсол. збіж.

$\int_1^{\infty} \sin x \frac{1}{x^p} dx$,

$\left| \int_1^A \sin x\, dx \right| = |\cos 1 - \cos A| < 2$

$1/x^p \to 0$, при $p>0$ $\quad \boxed{\text{збіж.}}$ $p>0$

<u>Відпов.</u>

абсол. зб. $1<p<2$

не абс. $0<p<2$

11. $$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$$

$x \to 0$ $\quad \frac{\ln(1+x)}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}}$ $\quad p-1<1$, $p<2$, $\boxed{\text{збіж}}$

$x \to \infty$ $\quad \frac{\ln(1+x)}{x^p} \sim \frac{\ln x}{x^p}$ $\quad p>1$ $\quad 1<p<2$ $\boxed{\text{збіж}}$

Лекція 13

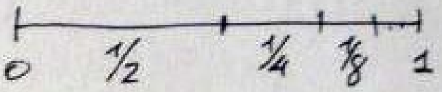
Ряди

I Числові ряди

Поряд з скінченними сумами, математики розглядали і нескінченні суми

Наприклад

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots\dots \quad =1$$



Тобто розглядали такі символи (!!!)

$$a_1+a_2+a_3+\dots\dots+a_n+\dots$$

наприклад.

$$1-1+1-1+1-\dots\dots\dots$$

Питали: чому це дорівнює?

Але (!) поки не дано визначення: що ми під цим розуміємо (?) не можна сказати, чому це дорівнює.

З часом математики дійшли до чітких означень!

Наприклад Ейлер вважав, що

$$1-1+1-1+\dots\dots\dots \quad = 1/2$$

Як він міркував?

$$S = 1-1+1-1\dots\dots = 1-(1-1+1\dots\dots) =$$
$$= 1-S$$

звідси $2S=1$, $S=1/2$.

Далі буде показано, як математики дали означення суми

перше — цей ряд не має суми

друге — сума цього ряду $= 1/2$

Ряди

Ряди

I. Числові ряди.

1° Поняття ряду. Збіжні, розбіжні ряди. Сума.

Розгл. деяку послідовність чисел $(a_n$

Деколи кажуть, що рядом називают символ $\sum\limits_{n=1} a_n$ (1)

$A_1 = a_1$

$A_2 = a_1 + a_2$

$A_3 = a_1 + a_2 + a_3$

\- - - -

$A_n = a_1 + \ldots + a_n$

. . . .

Озн. Рядом будемо називати дві послідовності $((a_n), (A_n))$, де (a_n) - послідовність членів ряду, а (A_n) - послідовність часткових сум.

Озн Ряд (1) зветься збіжним, якщ

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A < \infty$.

Ряд (1) зветься розбіжним, якщо

$\nexists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ A - сума ряду.

Сума скінченна - $A < \infty$ ряд збіжни

$\left.\begin{array}{l}\text{Сума - нескінченна}\\ \text{Суми немає}\end{array}\right\}$ ряд розбіжний

(2) - зб. → $\exists \lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$.

Розглянемо для (3) часткову су

$S_n = (\alpha a_1 + \beta b_1) + \ldots + (\beta b_n + \alpha a_n) =$

$= \alpha A_n + \beta B_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \alpha A + \beta B \to$

→ (3) - збіжний ◄

Розгл. ряд (4) $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+n} + \ldots$ лишок ряду (1) після m-того чле

Теорема 2. Якщо (1) збіжний, то

(4) - збіжний і навпаки: (1)-зб. ↔

► Розгл. $A_{m+n} = A_m + A^*_n$ m - фі

(1) - зб. → $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_{m+n} = \lim\limits_{n\to\infty} (A_m + A^*_n)$

→ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A^*_n$

⇐ Якщо (4)-зб., то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A^*_n \to$

→ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (A_m + A^*_n) \to \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_{m+n} = \lim$

$A = A_m + A^*$. (A_m - постійна!).

Теорема 3. Необхідна умова збіжності. (1) - зб. → $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

► (1) - зб. → $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. $\lim\limits_{n\to\infty} A_{n+1} = A \to$

→ $\lim\limits_{n\to\infty} A_{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0 = A - A$

або ~~lim~~ $A_n = A_{n-1} + a_n$.

$\lim A_n = \lim (A_{n-1} + a_n) = \lim A_{n-1} + \lim$

→ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ◄

Пр-ди: 1° $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

$$A_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$. Тому даний ряд розбіжний.

2° $1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$A_n = q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} \qquad |q| < 1$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$.

$|q| > 1 \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \infty$

Тому цей ряд збіжний при $|q| < 1$. При $|q| \geqslant 1 \rightarrow$ ряд розбіжний.

3° Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$ – розбіжний.

Властивості збіжних рядів.

Нехай маємо ряди

(1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

(2) $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$

Озн. Лінійною комбінацією рядів (1) і (2) зветься ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ (3)

Теорема 1. Якщо ряди (1) і (2) – збіжні, то ряд (3) теж збіжний.

▶ (1) – зб. $\rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Ряди з додатними членами.

Розгл. ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ (1)
$a_n>0$ $\forall n$.

Теорема (Критерій збіжності). Ряд (1) - збіжний $\leftrightarrow$ (A_n) - обмежена.

▶ (←) Якщо $a_n>0$, то (A_n) - монот. зростаюча $\to \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A \to$ (1) - збіжний.

(→) $a_n>0 \to$ (A_n - монот. зрост., A_n - зб.) $\to$
$\to$ A_n - обмежена. ◀

Ознаки порівняння.

(1) $a_1+\ldots+a_n+\ldots$, $a_n>0$
(2) $b_1+\ldots+b_n+\ldots$, $b_n>0$

1° $\exists n_0\ \forall n>n_0\ a_n\le b_n \} \to \{$ (2) - зб. → (1) зб. ; (1) - розб. → (2) - розб.

▶ Можемо вважати, що $\forall n\ a_n\le b_n$ (бо в теор. 2 доведено, що збіжність ряду не залежить від перших n номерів). Тому $\forall n\ A_n\le B_n$. (2) - зб. →
→ (B_n) - обмеж. → (A_n) - обмежена →
→ ~~an~~ Ряд (1) - зб.

Якщо (1) - розб., то A_n - необмеж. →
→ B_n - необмеж., (2) - розб. ◀

2° Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$.

При $k<\infty$ (2) - зб. → (1) - зб.,
(1) - розб. → (2) - розб.

При $k>0$, то (1) - зб → (2) - зб
(2) - розб. → (1) розб.

① Отримаємо $\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1} \to$

$\to a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n$. $\forall n$. $\to$ Застосувавши ознаку 1°, отримаємо результат

Ряди з монотонними членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_{n+1} \le a_n$$

Критерій збіжності ряду з монот. членами

Якщо ряд (1) з монот. членами, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ збіг. або розбіг. одночасно.

Означення $\int_a^{\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$

Інтегральна ознака збіжності ряду.

Нехай ряд (1) – з монот. коефіцієнтами, $f(x)$ - монот. ф-я, така що $f(n) = a_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіг.

$0<k<\infty \to$ (1) і (2) збіг. одночасно або розбігаються одночасно.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{зб. } p>1\\ \text{розб. } p\le 1\end{cases}.$$

▶ 1°. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k<\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0$

$$\underbrace{\frac{a_n}{b_n}<k+\varepsilon}_{\downarrow}\ \wedge\ k-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}$$

$a_n<(k+\varepsilon)b_n$ Отже, $\exists n_0\ \forall n>n_0\ a_n<(k+\varepsilon)b_n$

Враховуючи, що ряди b_n і $(k+\varepsilon)b_n$ збігаються і розбіг. одночасно, і ознаку 1° порівняння, отримуємо, що ряд a_n зб. якщо b_n зб., і якщо a_n розб то b_n розб.

2° $k>0$ Розглянемо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{k}<\infty$, тоді тв-ння 2° випливає з попереднього (міняючи місцями a_n і b_n). ◀

3° $\exists n_0\ \forall n>n_0\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$. Тоді якщо (2) збігається, то (1) збігається, якщо (1) розбіг., то ряд (2) розбіг.

▶ Аналогічно до 1°, вважаємо, що $\forall n\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Тобто $\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1},\ \frac{a_3}{a_2}\le\frac{b_3}{b_2}\ \dots\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_n}{b_{n-1}}$

Перемножимо ці нерівності.

Лекція 14

Ряди (продовження)

Тема „ряди" має два основних розділи

– числові ряди

– функціональні ряди

Ми почали розділ числові ряди

(1) $a_1+a_2+\dots+a_n+\dots\dots$

Означення. Ряд (1) наз. збіжним, якщо

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ A – скінченне.

де $A_n=a_1+a_2+\dots+a_n$ – част. сума

A – наз. сумою ряду.

! [Ми досліджуємо умови при яких ряд (1) збіжний]

Спочатку досліджуємо ряди з додатніми членами

($a_n>0$)

<u>Довели</u> <u>три ознаки</u> порівняння для рядів

(1) $a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$

(2) $b_1+b_2+\dots+b_n+\dots$

Найчастіше використовується такий наслідок з 2ої ознаки

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ $0<k<\infty$, то ряди (1) і (2)

ведуть себе однаково (або обидва збіжні, або обидва розб.)

І ще один важливий результат (необх. умова збіжн.)

(1) – збіжн. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ $(p\Rightarrow q)=(\neg q\Rightarrow\neg p)$

$\lim a_n\neq 0 \Rightarrow (1)$ – розб.

Далі розглянемо: З чим порівнювати!

Ряди з монотонними членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_{n+1} \le a_n$$

Критерій збіжності ряду з монот. членами.

Якщо ряд (1) з монот. членами, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ збіг. або розбіг. одночасно.

Означення $$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Інтегральна ознака збіжності ряду.

Нехай ряд (1) – з монот. коефіцієнтами, $f(x)$ – монот. ф-я, така що $f(n) = a_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіг. тоді і лише тоді, коли $\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$.

▶ f - монот. $\to \forall x \in [n, n+1]$ $\underset{a_n}{\underset{\parallel}{f(n)}} \ge f(x) \ge \underset{a_{n+1}}{\underset{\parallel}{f(n+1)}}$.

Тому $$\underset{a_{n+1}}{\underset{\parallel}{\int_n^{n+1} a_{n+1}\,dx}} \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \underset{a_n}{\underset{\parallel}{\int_n^{n+1} a_n\,dx}}$$

Отже, $a_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le a_n$. Візьмемо суму $\sum_{n=1}^{N}$ ÷ terminated.

$n = 1$:

$$a_2 \le \int_1^2 f(x)dx \le a_1;$$

$n = 2$

$$a_3 \le \int_2^3 f(x)dx \le a_2$$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$$a_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le a_n. \quad \Bigg| \; +$$

Отримаємо $\underset{A_{n+1}-a_1}{\underset{\|}{a_2+a_3+\ldots+a_{n+1}}} \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le \underset{A_n}{\underset{\|}{a_1+\ldots+a_n}}$

$$\underbrace{A_{n+1}-a_1 \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le A_n}$$

Припустимо, що a_n - збіжний. $\to$

$\to$ (A_n) - обмежена. $\to \exists M \; \forall n \; A_n \le M. \to$

$\to \int_1^{n+1} f(x)dx \le A_n \le M$ Тоді

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx$ (за теор. про границю монот. послідовності $- \int_1^{n+1} f(x)dx -$ монот. зрост. і обмеж. зверху)

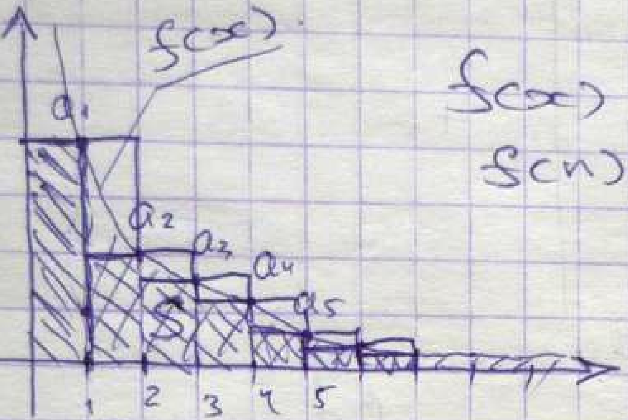
Нехай $\int_2^{\infty} f(x)dx < \infty$. Тоді

$\forall n \left(\int_1^{n+1} f(x)dx\right)$ - обмеж. Тобто $\exists M$

$\forall n \; \int_1^{n+1} f(x)dx < M\} \to \{A_{n+1} - a_1 < M. \to$

$\to \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_{n+1} \to (1)$ - збіжний.

Приклади.



f(x) – монот.,

f(n) = a_n.

$\int_1^\infty f(x)dx$ – площа під графіком.

За ознакою, якщо площа S_∞ – скінч., то ряд збігається, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – зб., то S – скінч.

Якщо S – скінченна, то площа прямокутників теж скінч., бо $\sum_{n=2}^{\infty} < \int_1^{\infty} f(x)dx$.

Навпаки, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – зб., то площа овн. прямокутників – скінченна →

→ S – скінченна.

Приклади. 1° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонічний ряд.

Розгл. $f(x) = \frac{1}{x}$. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln(x)\Big|_1^{+\infty} = +\infty$.

Отже, ряд – розбіжний.

2° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – узаг. гармонічний ряд.

$f(x) = \frac{1}{x^p}$. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^{+\infty} = (p \neq 1)$

$$= \begin{cases} \infty, & p < 1. \\ \frac{-1}{1-p} & p > 1 \end{cases}$$

Отже, при p < 1 ряд розбіжний, p>1 – ряд зб.

Ряд $\frac{1}{n^p}$ розбіг. при $0 < p \leq 1$ і ~~роз~~ збіг. при $p > 1$.

3° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \overset{?}{-} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$ Тобто ~~а~~

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1 \to$ ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

збіг. і розб. одночасно $\to \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ - збіг

4° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+2n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2+\frac{1}{n}}$ - зб.

5° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}$ $\qquad \sum\frac{1}{n}$ - розб.

~~[illegible]~~

6° $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ $\qquad \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ Тому цей ряд розб.

7° $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ $\qquad$ ~~1~~ $n\ln n < n^2$

$\frac{1}{n\ln n} > \frac{1}{n}.$

Розгл. ∞-но $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \int\limits_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x} =$

$= \ln\ln x\Big|_1^{\infty} = \infty.$ Отже, цей ряд розб.

8° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ $\qquad \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} = \frac{\ln n}{n^{1+\frac{1}{4}}\,n^{\frac{1}{4}}} \overset{\to 0}{<} 1 \quad \underline{n > n_0} \le$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}} = 0.$ $\qquad \le \frac{1}{n^{1+\frac{1}{4}}}$ - зб. $\to$

$\to \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ - зб.

9° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p} = \begin{cases} p \le 1 - \text{розбіжний} \\ p > 1 - \text{збіжний}. \end{cases}$

$\frac{\ln n}{n^p} = \frac{\ln n}{n^{1+\alpha/2} n^{\alpha/2}}$, $\alpha > 0 \to \frac{\ln n}{n^{1+\alpha/2} n^{\alpha/2}} \overset{\exists n_0 \forall n > n_0}{<} \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}$ - зб.

10° $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n} = \begin{cases} p > 1 - \text{зб.} \\ p = 1 - \text{розб.} \\ p < - \text{розб.} \end{cases}$

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$ і $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^q n}{n^p}$ - зб. чи розб.

$\sum a_n$ $\sum 2^k a_{2^k}$; $a_n = \frac{1}{n^p \ln n}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^p \ln 2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k \ln 2 (2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{2}{2^p}\right)^k$ -

якщо $p = 1$ - ряд розб.

$p > 1$ - $\frac{2}{2^p} < 1$ - ряд зб.

$p < 1$ - ряд розб.

Ознаки Коші і Даламбера

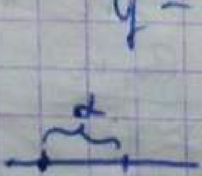
Розгл. ряд (1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

Ознака Коші (варіанта 1)

Нехай $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тоді $q < 1 \to (1)$ - зб.

$q > 1 \to (1)$ - розб. $q = 1$ - ∃ як зб. так і розб. ряди.

▶ Нехай $q < 1$



$1 - q = \alpha$

Візьмемо $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q \to$ ~~∀~~ $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ \sqrt[n]{a_n} < \underset{q_1}{\underset{\shortparallel}{q+\varepsilon}}$

$q-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n}$ $\quad q_1 < 1 \quad (q+\frac{\alpha}{2} < 1.)$

Отже, $\exists n_0\ \forall n>n_0\quad a_n < q_1^n$

Застосуємо 1-у ознаку порівняння. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_1^n$ - зб. як сума геом. прогресії при $q_1 < 1$. Тому ряд a_n - зб.

$q > 1$.

$q = 1+\alpha$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q \to$ для $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}\ \exists n_0\ \forall n>n_0$

$\underbrace{q-\varepsilon}_{q_2} < \sqrt[n]{a_n} < q+\varepsilon \to \exists n_0\ \forall n>n_0\ q_2^n < a_n$,

але q_2^n - розб. $\to a_n$ - розб.

або $1 < q-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} \to 1 < a_n \to$

$\to \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \to$ необх. умова не вик. $\to$

$\to \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - розб.

зб.

$q = 1 \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Отже, при $q=1$, ряд може бути і зб. і розб.

озб

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$ ◄

Ознака Коші (2-ий варіант).

Нехай $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = q$. Тоді:

1. $q < 1 \to (1)$ - зб
2. $q > 1 \to (1)$ - розб.
3. $q = 1 \to \exists$ ~~як~~ зб. так і розб. ряди.

▶ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = q \overset{def}{=} \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ [\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon] \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n > n_0\ [q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}] \end{cases}$

Дов-ння проводиться за попер. схемою.

$q < 1$ - аналогічно до 1-ого варіанту

$q > 1$ За тією ж схемою $\forall n_0\ \exists n > n_0$

~~$q-\varepsilon>1$~~ $1 < q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} \to 1 < a_n$

Отже, $\exists\ a_n$ з як завгодно великими номерами, що $a_n > 1 \to$

$\to \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

$q = 1$. Можна привести ті ж приклади ◀

Ознака Даламбера (1-ий варіант)

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ Тоді:

1° $q < 1$ - (1) - зб.
2° $q > 1$ - (1) - розб
3° $q = 1$ - $\exists$ як зб. так і розб. ряд

▶ $q < 1$ $\alpha = 1 - q$ $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ Тоді

$\exists n_0\ \forall n > n_0 \quad q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = q_1 < 1,$

Розглянемо Σa_n і Σq_1^n і застосуємо третю ознаку порівняння.

Отримаємо: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q_1^{n+1}}{q_1^n} = q_1 \rightarrow$

$\rightarrow$ ряд (1) − зб. (за $\underline{\text{III}}$ озн. порівняння)

$q > 1. \quad q - 1 = \alpha \qquad \varepsilon = \frac{\alpha}{2}.$

Для $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ $\exists n_0 \forall n > n_0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon\ \wedge$

$$\wedge\ \underset{\substack{\parallel \\ 1 < q_1}}{q - \varepsilon} < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Отже, $\exists n_0 \forall n > n_0$

$1 < q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow a_n < a_{n+1}. \rightarrow$

$\rightarrow$ ряд розб., бо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Не вик. необхідна умова.

$q = \underline{1} \qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$ ◄

Ознака Даламбера (2-ий варіант)

Нехай $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тоді

1. $q < 1$ − (1) − зб.
2. $\exists n_0 \forall n > n_0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ − (1) − розб.

$\exists$ як зб. так і розб. ряди, для яких $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

▶ 1° $q < 1$ дов-ня аналогічне з використанням озн. $\overline{\lim}$.

2° $\exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \to$

$\to a_{n+1} \geq a_n$ – не вик. необх. умова $\to$ (1) – розб.

3°. Приклад $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots +$

$+ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$

$$A_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} =$$

$$= \underset{\leq 1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)} + \underset{\leq 1}{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}\right)}$$

$\leq 2 \to \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_{2n} \to$ ряд збіжний

Знайдемо $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

~~$\left(\frac{1}{2}\right)^n : \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$~~

* $\left(\frac{1}{3}\right)^n : \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$

$$\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty.$$

Отже, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$

Лекція 15

Ряди (продовження)

Ряд $\sum a_n$ - збіжн $\overset{df}{=} \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A < \infty$

A - сума ряду

Необхідна умова збіжн.

$$\sum a_n \text{ - зб.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Ряди з додатн. членами

∨ Ознаки порівн.

∨ Інтегральне ознака

$$\left[\begin{array}{l} a_n \text{ - моног.}, \quad f \text{ - моног. } f(n)=a_n \\ \sum a_n \text{ - зб.} \Longleftrightarrow \int\limits_2^\infty f(x)dx < \infty \end{array}\right.$$

∨ Ознаки Коші, Даламбера

$$\left[\begin{array}{ll} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q & (\text{озн. Коші}) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q & (\text{озн. Даламбера}) \end{array}\right]$$

Тоді
$$\left[\begin{array}{ll} q < 1 & \text{- ряд збіжн.} \\ q > 1 & \text{- ряд розб.} \\ q = 1 & \text{- (потрібні дод. дослід.)} \end{array}\right]$$

Приклади

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{3^n} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Big(\overset{\overset{1}{\uparrow}}{\sqrt[n]{n}}\Big)^2}{3} = \frac{1}{3} < 1 \quad \underline{\text{ряд збіжн}}$$

або $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2/3^{n+1}}{n^2/3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1 \quad \text{ряд зб}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{3^n}{n!} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{3^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\ n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1 \quad \text{- ряд. зб.}$$

З інтегральної ознаки маємо

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ - збіжн.} \Longleftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ - збіжн.}$$

Тому
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{matrix} p > 1 \text{ - збіжн.} \\ p \le 1 \text{ - розбіжн.} \end{matrix}}$$

Ряди з членами довільних знаків.

Знакопочеречні ряди

$$C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots \quad (-1)^{n+1} C_n + \dots \qquad (1) \quad \boxed{C_n > 0}$$

<u>Ознака Лейбніца</u>

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ \forall n \quad C_{n+1} \le C_n \\ &\cdot\ \lim_{n\to\infty} C_n = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ряд } (1) \text{ збіжний}$$

Дов. $C_{2n} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2n-1} - c_{2n}$

$$= c_1 - (\overset{\ge 0}{c_2 - c_3}) - (\overset{\ge 0}{c_4 - c_5}) - \dots - c_{2n} < c_1$$

$$C_{2(n+1)} = C_{2n} + (\overset{\ge 0}{c_{2n+1} - c_{2n}}) \ge C_{2n}$$

Тому C_{2n} - послід. монот. зрост. ∧ обм. зверху ⇒

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} C_{2n} = C.$$

Тепер $C_{2n+1} = C_{2n} + c_{2n+1}$ $\quad \lim C_{2n+1} = \lim (C_{2n} + c_{2n+1})$

$$= \lim C_{2n} + \underset{\overset{\|}{0}}{\lim c_{2n+1}} = C.$$

$$\boxed{\text{Тому } \forall n \ \exists \lim C_n = C}$$

Приклад. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$

збіжний при $p>0$

- $\frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{n^p}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

$\Bigg\} \xrightarrow{\text{за озн. Л.}}$ збіжн.

Критерій Коші збіжн. ряду

Теорема (крит. Коші)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - збіж.} \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \ \forall n, p \ [n>n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon]$$

Довед.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - зб.} \overset{df}{=} \exists \lim_{n\to\infty} A_n \overset{\text{к. К}}{\iff} \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \ \forall n, m \ [n>n_0 \wedge m>n_0 \Rightarrow |A_m - A_n| < \varepsilon]$$

нехай $m = n+p$, тоді

$$= \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \ \forall n, p \ [n>n_0 \Rightarrow |A_{n+p} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon]$$

Абсолютно і умовно (неабсолютно) збіжні ряди

(1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

(2) $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$

Означення.

Ряд (1) наз. абсол. збіжн $\overset{df}{=}$ якщо ряд (2) збіжн.

Означ.

Ряд (1) наз. умовно зб. $\overset{df}{=}$ якщо (1) - зб. $\wedge$ (2) розб.

Приклади

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$$

Цей ряд збіжн. за озн. Лейбніца, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - розбіжний за інтегр. ознакою.

Тому ряд $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ - умовно збіжн.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ - абсол. зб., бо $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - збіжн. $\underline{\underline{p=2>1}}$

Теорема.

Якщо ряд $\sum|a_n|$ - зб., то $\sum a_n$ - збіжн.

Довед.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ - збіжн. } \overset{\text{кр. К}}{=} \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n,p$$

$$[n>n_0 \Rightarrow |a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_{n+p}|<\varepsilon]$$

$$\Downarrow$$

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|\le|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots|a_{n+p}|< \\ <\varepsilon$$

тому виконується крит. Коші збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

Властивості рядів з додатніх і відємних членів для абсолютно збіжних і умовно збіжних рядів.

(1) $a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$

(2) $|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n+\dots$

(3) $p_1+p_2+\dots+p_s+\dots$ p_s - додатні з (1)

(4) $q_1+q_2+\dots+q_t+\dots$ q_t - абс. велич. відємн. членів з (1)

A_n - част. суми (1)

A_n^* - част. суми (2)

P_s - част. суми (3)

Q_t - част. суми (4)

Розглянемо випадки.

$A_n = P_s - Q_t$

$A_n^* = P_s + Q_t$

$s+t=n$

I (1) - збіг. абсол. $\Rightarrow$ (1) і (2) - збіжні

$\Rightarrow \exists \lim A_n \wedge \exists \lim A_n^*$

$\Rightarrow \exists \lim P_s$ $2P_s = A_n + A_n^*$

$\exists \overset{\Downarrow}{\lim_{t\to\infty}} Q_t$ $2Q_t = A_n^* - A_n$

Отже, якщо (1) - абс. збіжн., то (3) і (4) - збіжні

II (1) - збіг. умовно $\Rightarrow$ (1) - зб. $\wedge$ (2) роз.

$\Rightarrow \exists \lim A_n \wedge \neg\exists \lim A_n^*$

Чи можуть $\exists \lim P_s \wedge \neg \lim Q_t$?

Ні! Бо тоді $\exists \lim A_n^x$

Чи можуть $\exists \lim P_s \wedge \neg \lim Q_t$?

Ні! Бо тоді $\neg\exists \lim A_n$.

Якщо (1) - умовно збіжн. то (3) і (4) розбіжні ряди.

Висновок

$\neg\exists \lim P_s \wedge \neg\exists \lim Q_t$ = ряди (3) і (4) - розб.

Ряди з членами з довільними знаками

Знакопочережні ряди

Вважаємо, що $c_n > 0$.

Розгл. ряд

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + (-1)^{n+1} c_n + \dots \quad (1)$$

Ознака Лейбніца

Нехай у ряді (1)

$\forall n \ c_{n+1} \leq c_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$.

Тоді (1) – збіжний

▶ Розглянемо C_{2n} – часткові суми:

$$C_{2n} = c_1 + c_2 + \dots + c_{2n-1} - c_{2n} =$$

$$= c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(c_4 - c_5)}_{\geq 0} - \dots - (c_{2n} \cancel{- c_{2n-1}} <$$

(з умови.

$< c_1$

$$C_{2(n+1)} = c_{2n+1} + C_{2n} - c_{2n+2} \geqslant C_{2n}$$

C і обмежена

зверху. Отже, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} C_{2n} = C$

Розгл. $C_{2n+1} = C_{2n} + c_{2n+1} \to$

$\to \lim\limits_{n\to\infty} C_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} C_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} c_{2n+1} = C$

Отже, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} C_n = C \to$ ряд збіг. ◀

Пр-д. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ − зб. за ознакою Лейбніца.

— " —

Нехай (1) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, a_n мають довільні знаки.

Критерій Коші збіжності ряду.

(1) − збіжний $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, p$: $n > n_0$ $[|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.]$

▶ (1) − зб. $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. За критерієм Коші для послідовностей,

$\forall \varepsilon\ \exists n_0\ \forall m, n$ $\begin{matrix} n > n_0 \\ m > n_0 \end{matrix}$ $[|A_m - A_n| < \varepsilon] =$

$m = n + p$.

$= \forall \varepsilon\ \exists n_0\ \forall n, p$ $n > n_0$ $[|A_{n+p} - A_n| < \varepsilon]$

$\parallel$

$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon)$

Абсолютно і умовно збіжні ряди

(1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

(2) $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$

Означення. Ряд (1) зветься абсолютно збіжним, якщо збігається ряд 2.

Означення. Якщо (1) - зб., і ряд (2) - розбіжний, то ряд (1) - умовно збіжний, або неабсолютно збіжний.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ - умовно збіжний

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ - абсолютно збіжний

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots =$$

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{19}} - \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} A$$

Абсолютно і умовно збіжні ряди.

1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

2) $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$

Теорема. Якщо (2) збіжний, то ряд (1) - біжний.

▶ (2) - зб. → за критерієм Коші $\forall \varepsilon > 0$

$\exists n_0 \ \forall n, p \ [n > n_0 \to |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon] \to$

$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon \to$

для (1) вик. критерій Коші →

→ (1) - зб. ◀

Властивості рядів з додатніх і від'ємних членів для абсолютно і умовно збіжних рядів.

Для ряду (1) випишемо

(3) $p_1 + p_2 + \ldots + p_s + \ldots$ - ряд з дод. члені з (1)

(4) $q_1 + q_2 + \ldots + q_t + \ldots$ - ряд з абсолют них величин від'ємних членів з (1)

A_n - часткові суми ряду (1)

A_n^* - часткові суми ряду (2)

P_s - частк. сума (3)

Q_t - частк. сума (4)

$A_n = P_s - Q_t \quad s+t=n$

I. Нехай ряд (1) – збігається абсолютно $\to \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n^* = A^*$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$

Що можна сказати про існування $\lim P_s$ і Q_t?

Припустимо, що $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} P_s$ і $\lim\limits_{n\to\infty} Q_t$.

Але тоді $2P_s = A_n + A_n^* \to \exists \lim\limits_{s\to\infty} 2P_s$!

Тоді $\exists \lim Q_t$. Отже, обидві границі існують

II Нехай (1) – умовно збіжний, тобто $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n \wedge \nexists \lim\limits_{n\to\infty} A_n^*$

Тоді одночасно P_s і Q_s не можуть існувати. Припустимо, що одна з ~~[illegible]~~ границь існує, ~~не~~ тоді $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty}(P_s - Q_t) \to$

$\to \exists$ границя другої, або

$A_n^* = 2P_s - A_n \to$ якщо ~~P_s~~ $\exists \lim P_s$,

то $\exists \lim A_n^*$ – суперечність.

Отже, (3) і (4) – розб.

Доведено таку теорему:

Якщо (1) абсолютно збіжний, то ряди з дод. ~~величин~~ і абсолютних від'ємних елементів є збіжні, і сума ряду $A = P - Q$.

Якщо ряд (1) умовно, то ряди (3), (4) – ~~збіжні~~ розбіжні!

Асоціативна властивість рядів

Розгля. ряд (1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$,

(5) $$\underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2})}_{b_2} + \dots + \underbrace{(a_{n_k+1} + \dots + a_{n_{k+1}})}_{b_k} + \dots$$ – ряд з погрупованими членами.

Розглянемо послідовність часткови сум:

$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ для (1)

$B_1, B_2, \dots B_k, \dots$ для (5)

Легко зауважити, що $B_1 = A_{n_1}$
$B_2 = A_{n_2}$, $B_3 = A_{n_3}, \dots, B_k = A_{n_k}, \dots$

Отже, послідовність (B_k) – підпосл довність (A_n)

Теорема

а) Якщо ряд (1) – збіжний, т ряд (5) з погруп. членами – збіжний. Навпаки, взагалі кажучи, невірно.

б) Якщо в ряді (5) в кожній дужці члени однакового знаку, то зі збіжності (5) ви ває збіжність (1).

▸ а) $\Rightarrow$ (1) - зб $\to$ (A_n) - зб. $\to$ $\forall (A_{n_k})$ - збіжна $\to$ (B_k) - зб. $\to$ ряд (5) - зб.

Пр-д.

$(1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots$ - ряд з погруп. членами - збіжний

$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$ - розбіжний.

б) $A_1, A_2, \dots \boxed{A_{n_1}} \dots A_i \dots \boxed{A_{n_2}}\ A_j \dots \boxed{A_{n_3}}$

$A_{n_i} \to A^*$ тоді де A_i ?

$\le A_i \le A_{n_2}$ ∨ $A_{n_2} \le A_i \le A_{n_1}$ → всі A_i теж прямують до A^* ◂

Комутативна властивість абсолютно збіжних рядів. *

Розгл. ряд (1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

Розгл. ряд з переставленими членами

(6) $a_1' + a_2' + \dots + a_n' + \dots$

Теорема. (Діріхле) Якщо ряд (1) абсолютно збіжний, то ряд (6) теж збіжний і сума (1) рівна сумі (6).

▸ Припустимо, що (1) - з додатніх членів.

Розглянемо часткову суму

$A_n' = a_1' + a_2' + \dots + a_n' \le A_m$, де m - максимальний номер, з яким в ряд (1) входять $a_1', \dots a_n'$.

$A_m < A$ - сума ряду (1).

Отже, $\forall n$ $A'_n < A$ (1) - ряд з дод. членів → A'_n - монотонна

(A'_n) - монот. і обмеж. → $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A'_n \le A$

(1) - це перестановка ряду (6) →

→ $A \le A'$ → $A = A'$

Загальний випадок. Маємо, що (1) - абсолютно зб. Розглянемо ряди (3) і (4). Доведемо, що $A = P - Q$

Розгл. (7) $|a'_1| + |a'_2| + \ldots + |a'_n| + \ldots$

(3'), (4') - ряди з дод. і від'ємних членів ряду (6)

(3') $p'_1 + \ldots + p'_s + \ldots$

(4') $q'_1 + \ldots + q'_t + \ldots$

(1) - абсол. зб. → (2) - зб. → (7) - зб. →

→ (6) - абсол. зб. → $A' = P' - Q'$. Застосуємо тільки що доведене до (3'), (4'), (3), (4): $P = P'$, $Q = Q'$. Отже,

$A' = P' - Q' = P - Q = A$. ◄

Теорема Рімана

Нехай ряд (1) - умовно зб. Тоді $\forall K$, $(-\infty \le K \le +\infty)$ $\exists$ така перестановка членів ряду, що його сума буде рівна K.

Лекція 16

Властивості числових рядів

Асоціативна властивість рядів

Розглянемо ряди

(1) $a_1+a_2+a_3+\dots\dots+a_n+\dots$

$$(5)\quad \underset{\overset{\parallel}{b_1}}{(a_1+a_2+\dots+a_{n_1})}+\underset{\overset{\parallel}{b_2}}{(a_{n_1+1}+\dots+a_{n_2})}+\dots+\underset{\overset{\parallel}{b_k}}{(\overset{a_{n_{k-1}+1}}{\overset{\parallel}{a_{n_{k-1}+1}}}+\dots\overset{a_{n_k}}{\overset{\parallel}{a_{n_k}}})}+\dots$$

(5) $b_1+b_2+\dots+b_k+\dots$

Розглянемо послідовність часткових сум

$A_1, A_2, \dots A_n, \dots$

$B_1, B_2, \dots B_k \dots$

Зауважимо, що $B_1=A_{n_1}$, $B_2=A_{n_2}, \dots B_k=A_{n_k}$

Отже, послідовність (B_k) є підпосл. (A_n)

Теорема. а) Якщо ряд (1) – збіжний, то ряд (5) збіжний навпаки, взагалі не вірно.

б). Якщо в ряді (5) в кожній дужці члени одного знаку то з збіжн. (5) випливає збіжн. (1)

Довед.

а). (1) – збіжн. $\Rightarrow$ (A_n) – збіжн. $\Rightarrow$ (B_k) – збіжн. підпосл $\Rightarrow$ (5) – збіжн.

Приклад $1-1+1-1+\dots$ не збіжн. і $(1-1)+(1-1)+\dots+(1-1)+\dots$ збіжн.

б). $A_1, A_2, \dots A_{n_1}, A_{n_1+1} \dots A_{n_2} \dots A_{n_3} \dots A_{n_k} \dots$

$\overset{\parallel}{B_1} \qquad B_2 \dots \quad B_3 \dots \quad B_k \dots$

$B_1 < A_i < B_2 > A_j > B_3$

якщо a_j додатн. якщо a_n – від'ємні

$\lim B_k = \lim A_n$

Якщо послід. (B_k) – збіжн., то послід (A_n) – збіжна

Комутативна властивість абсолютно збіжних рядів

Розглянемо ряди

(1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

і

(6) $a_1' + a_2' + \dots + a_n' + \dots$

де ряд (6) з переставленими членами ряду (1)

Теорема Діріхле. Якщо ряд (1) абсолютно збіжний, та ряд (6) також збігається і сума ряду (1) дорівнює сумі ряду (6)

Довед. Припустимо, що ряд (1) з додатними членами. Розглянемо часткові суми ряду (6)

$A_n' = a_1' + a_2' + \dots + a_n' < A_m$, де m максимальний номер з яким $a_1', a_2' \dots a_n'$ входять в ряд (1)

A_m - моно. зрост. $A_m < A$ - сума ряду (1)

Тоді $\forall n \ A_n' < A$ $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim A_n' = A' \le A$

(A_n') - моно. зр.

Отримали, що при перестановці членів ряду сума ряду не зростає

$A \le A'$

Але ряд (1) є перестан. (6), тому

звідси $A' = A$

Розглянемо загальний випадок (ряд (1) - абсол. зб.)

(3) $p_1 + p_2 + \dots + p_s + \dots$ (3) (4) - збіжні

(4) $q_1 + q_2 + \dots + q_t + \dots$ P - сума (3) Q - сума (4)

$A_n = P_s - Q_t \Rightarrow \lim A_n = A = P - Q$

Для ряду (6) (3') $p_1' + p_2' + \dots + p_s' + \dots$ їх суми $P' = P$

(4') $q_1' + q_2' + \dots + q_t' + \dots$ $Q' = Q$

згідно тверд. для рядів з додатн.-н

(2) $|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|+\dots$

(7) $|a_1'|+|a_2'|+\dots+|a_n'|+\dots$

(1) - абсол. зб. $\Rightarrow$ (2) - збіжн. $\Rightarrow$ (7) - збіжн. $\Rightarrow$ (6) - абсол. зб.

$$\Rightarrow A'=P'-Q' \Rightarrow A'=P-Q \Rightarrow A'=A$$

Теорема Рімана

Теорема. Якщо ряд (1) збіжний неабсолютно (умовно збіжний), тоді $\forall K(-\infty \le K \le +\infty)$ $\exists$ така перестановка членів ряду, що його сума буде дорівнювати K.

Дов.

(1) $a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$

(3) $p_1+p_2+\dots+p_s+\dots$

(4) $q_1+q_2+\dots+q_t+\dots$

Відомо: (1) - неабсол. зб. $\Rightarrow$ (3) і (4) - розбіжні

Нехай K - скінченне і $K>0$.

З того, що (3) розбіжний, можемо вибрати з ряду (3) — $p_1, p_2 \dots p_{n_1}$

$K < p_1+p_2+\dots+p_{n_1}$ так, щоб при відкиданні p_{n_1} нерівність порушилась

Далі з (4) вибираємо $q_1\dots q_{m_1}$

$K > (p_1+p_2+\dots+p_{n_1})-(q_1+\dots+q_{m_1})$ так, щоб при відкиданні q_{m_1} нер. поруш.

Далі з (3) вибираємо

$p_{m_1+1}\dots p_{n_2}$

$K < (p_1+p_2+\dots+p_{n_1})-(q_1+q_2+\dots+q_{m_1})+(p_{n_1+1}+\dots+p_{n_2})$

Знову вибираємо $q_{m_1+1}\dots q_{m_2}\dots$

Цей процес продовжуємо поки не виберемо всі члени рядів (3), (4), а значить всі члени ряду (1). Отримаємо ряд

$$(8)\quad (p_1+p_2+\dots+p_{n_1})-(q_1+\dots+q_{m_1})+(p_{n_1+1}+\dots p_{n_2})-(\quad)\dots$$

Часткові суми цього ряду відрізняються від K на останній член в останній дужці – p_{n_i} або q_{m_i}.

Але, зі збіжності ряду (1) $\lim a_n=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim p_{n_i}=0 \wedge \lim q_{m_i}=0$$

Тому часткові суми ряду (8) (S_K)

$$\lim_{k\to\infty} S_K = K$$

Враховуючи, що члени ряду (8) (в дужках) одного знаку, ми можемо опустити дужки (розгрупувати).

Отримали переставлений ряд який збігається до K.

Для випадку $K=+\infty$

$1 < p_1+\dots+p_{n_1}$

$(p_1+\dots+p_{n_1})-q_1$

$2 < (p_1+\dots+p_{n_1})-q_1+(p_{n_1+1}+\dots+p_{n_2})$

$(p_1 \quad)-q_1+(\quad)-q_2$

$3 < (\quad)-q_1+(\quad)-q_2+(p_{n_2+1}+\dots p_{n_3})$

$\dots$

$4 < \dots$

Множення рядів

Дано

(1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

(2) $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$

Складемо таблицю

$$\begin{array}{llllll}
a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 & \dots & a_n b_1 & \dots \\
a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 & & a_n b_2 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
a_1 b_n & a_2 b_n & a_3 b_n & \dots & a_n b_n & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Означ. Добутком рядів (1) (2) в розумінні Коші будемо називати ряд

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots$$

Теорема. Якщо ряди (1) і (2) абсолютно збіжні, то добуток рядів (при довільному означенні) буде збіжним і сума добутку рядів буде дорівнюватиме добутку сум.

$$S = A \cdot B$$

Зауважимо, що вибирати члени з таблиці добутків можна довільним способом. Тоді ми будемо мати інші означення добутків.

$A' = P' - Q' = P - Q = A$. ◄

Теорема Рімана

Нехай ряд (1) - умовно зб. Тоді $\forall K$, $(-\infty \leq K \leq +\infty)$ $\exists$ така перестановка членів ряду, що його сума буде рівна K.

▶ Нехай k – скінченне, $k>0$

Якщо (1) - неабсолютно збіжний, то ряди (3) і (4) – розбіжні →

→ З (3) ~~p_1+p_2~~ візьмемо $p_1+p_2+\dots+p_{n_1}$, щоб $p_1+p_2+\dots+p_{n_1}>k$, але так, щоб нерівність порушувалась при відкиданні p_{n_1},

$(p_1+\dots+p_{n_1})-(q_1+\dots+q_{m_1})<k$ і нерівність порушувалась при відкиданні q_{m_1}.

$(p_1+\dots+p_{n_1})-(q_1+\dots+q_{m_1})+(p_{n_1+1}+\dots+p_{n_2})>k$

набир. p_i так, щоб при відкиданні p_{n_2} нерівність порушув.

Продовж. процес, поки не виберемо всі члени з (3) і (4)

Отр. ряд

$$(p_1+p_2+\dots+p_{n_1})-(q_1+\dots+q_{m_1})+$$
$$+(p_{n_1+1}+\dots+p_{n_2})-\dots \qquad (8)$$

Розгл. $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$ – послід. частк. сум (8).

Кожне S_i відрізняється від k менше ніж p_{n_i} чи q_{m_i}

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \to \lim\limits_{n\to\infty} p_{n_i}=0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} q_{m_i}=0 \to$

$\to \lim\limits_{k\to\infty} S_k=k$. Враховуючи, що в дужках – члени одного знаку можемо їх опустити. Ряд, що отримаємо – це ряд з переставленими членами для (1), що збігається до K.

$K = +\infty$

Спочатку набрати $p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} > 1$
далі набрати $(p_1 + \ldots + p_{n_1}) - q_1 + (p_{n_1+1} + \ldots +$
> 2;
Потім $(p_1 + \ldots + p_{n_1}) - q_1 + (p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_2}) - q_2 + (p_{n_2+1} + \ldots + p_{n_3}) > 3 \ldots$ і т.д. – розу пучаємо ряд. Він збіг. до $+\infty$.

Множення рядів.

Нехай дано (1) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$
(2) $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$

Складемо таблицю з попарних добутк

$$\begin{array}{cccccc} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \ldots & a_nb_1 & \ldots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \ldots & a_nb_2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \ldots & a_nb_n & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Означення. Добутком рядів (1) і (2) в розумінні Коші називатимемо ряд
$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots$

Теорема. Якщо ряди (1) і (2) - абсолютно збіжні, то добуток рядів (при будь-якому означенні) є збіжний, і сума добутку дорівнює добутку сум.

▶ Розглянемо ряди з абсолютних величин

$|a_1| + \dots + |a_n| + \dots$ 1^*

$|b_1| + \dots + |b_n| + \dots$ 2^* - збіжні

Візьмемо довільне розміщення членів

$a_{n_1}b_{m_1} + a_{n_2}b_{m_2} + \dots + b_{m_k}a_{n_k} + \dots$ (3) - ряд, складений з членів утвореної таблиці.

Треба показати, що $S = A \cdot B$, де S - сума ряду (3)

Для ряду (3) розглянемо 3^* - ряд з абсолютних величин

$|a_{n_1}b_{m_1}| + \dots + |a_{n_k}b_{n_k}| + \dots$

Покажемо, що (3^*) - збіжний. Тоді із зб. ряду (3^*) випливатиме, що (3) - зб. абсолютно. Потім переставимо члени ряду (3) і отримаємо, що $S = A \cdot B$

Розглянемо $S_k^* = |a_{n_1}||b_{m_1}| + \dots + |a_{n_k}||b_{m_k}|$.

З $n_1, n_2, \dots n_k$ виберемо max:

$\max\{n_1, n_2, \dots n_k\} = p$

$\max\{m_1, m_2, \dots m_k\} = s$

Тоді $S_k^* \le (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_p|)(|b_1| + \dots |b_s|) \le A^* \cdot B^*$, де A^*, B^* - суми рядів (1^*) і (2^*).

Отже, S_k^* - обмежена → (за критеріємо) $\to (3^*)$ – зб. $\to$ (3) – зб.

$(\lim S_k^* = S^* \le A^* \cdot B^*)$ Для дов-ня, що $S^* = A^* \cdot B^*$, ряд (3^*) перегрупуємо.

Переставимо члени ряду і погрупуємо:

(4) $|a_1||b_1| + (|a_1||b_2| + |a_2||b_2| + |a_2||b_1|) + (\ldots) + \ldots$

Розглянемо Q_n^* – часткову суму ряду (4)

$Q_n^* = |a_1||b_1| + (|a_1||b_2| + |a_2||b_2| + |a_2||b_1|) + (\ldots) + \ldots + (|a_1||b_n| + \ldots + |a_n||b_1|) =$
$= (|a_1| + \ldots + |a_n|)(|b_1| + \ldots + |b_n|) = A_n^* \cdot B_n^*$

тому $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n^* = Q^* = A^* \cdot B^*$.

Ряд 3^* – переставлений ряд 4 $\to$
$\to$ за попер. теоремою
$S^* = A^* B^*$.

Залишилось довести, що $S = A \cdot B$.
Переставимо члени ряду (3) таким чином:

(5) $a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + \ldots$

$P_n = A_n \cdot B_n$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P = A \cdot B$.

Ряд (3) – ряд з переставл. членами для (5). Тому його сума теж рівна $A \cdot B$. – $S = A \cdot B$. ◄

Дослідження збіжності рядів з довільними членами.

Маємо ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a_n - довільного знаку

Спочатку досліджимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, для якого маємо ознаки порівняння, інтегральну, Коші, Даламбера. Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - зб., то і (1) - зб., але якщо (1*) - розб., то (1) треба досліджувати далі.

При дослідженні ряду (1*) за Коші чи Даламбером, якщо $q > 1$, то (1*) - розб. Але тут і ряд (1) - розб., бо $a_n \not\to 0$ при $n \to \infty$. (див. доведення ознак Коші і Даламбера)

Ознаки Абеля і Діріхле

Перетворення Абеля

Розгл. $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$

$B_1 = b_1$ → $b_1 = B_1$, $b_2 = B_2 - B_1$

$B_2 = b_1 + b_2$

$B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ $\quad b_n = B_n - B_{n-1}$.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n =$$
$$= a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \ldots + a_n (B_n - B_{n-1}) =$$
$$= B_1 (a_1 - a_2) + B_2 (a_2 - a_3) + \ldots + B_{n-1} (a_{n-1} - a_n) +$$
$$+ \cancel{B_n} B_n a_n = B_n a_n + \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_i - a_{i+1}).$$

Отже, $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_n B_n + \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_i - a_{i+1})$

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (1)

Ознака Абеля

Нехай 1°. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжний

2°. (a_n) – монотонна і обмежена.

Тоді ряд (1) – зб.

Ознака Діріхле.

Нехай

1°. ~~Суст~~ Суми $\sum_{n=1} b_n$ – обмежені:

$\exists M \ \forall n \ \left|\sum_{i=1}^{n} b_i\right| \leq M$.

2°. (a_n) – монотонно прямує до нуля

$a_n \searrow 0$.

Тоді ряд (1) – зб.

Доведення.

Доведемо ознаку Діріхлє. Для цього покажемо, що для (1) має місце критерій Коші:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, p \left[n > n_0 \rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon \right]$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k} = \sum_{k=1}^{p-1} B_{n+k}(a_{n+k} - a_{n+k+1}) + a_{n+p} B_{n+p}$$

за перетворенням Абеля

$$(*) = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{n+k} b_{n+k}\right| \leq |a_{n+p} B_{n+p}| + \sum_{k=1}^{p-1} |B_{n+k}||a_{n+k} - a_{n+k}$$

$$B_{n+k} = b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+k} =$$

$$= (b_1 + \ldots + b_{n+k}) - (b_1 + \ldots + b_n)$$

$$|B_{n+k}| \leq |b_1 + \ldots + b_{n+k}| + |b_1 + \ldots + b_n| \leq 2M$$

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

Тому $\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| \leq 2M\left(|a_{n+p}| + \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k} - a_{n+k}\right.$

$$\sum^{p-1} (a_{n+k} - a_{n+k+1}) = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - \quad) + \ldots + (\quad - a_{n+p}) \left| \overset{\parallel}{\sum_{k=1}^{p-1}} (a_{n+k} - a_{n+k} \right.$$

(бо всі члени знако

Тоді $2M(|a_{n+p}| + |\sum_{k=1}^{p}(a_{n+k} - a_{n+k+1})|) \le$

$\le 2M(2|a_{n+p}| + |a_{n+1}|)$

$a_n \searrow 0 \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \ \forall n > n_0$

$|a_n| < \frac{\varepsilon}{6M}$.

Тоді $\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| < 2M(2\frac{\varepsilon}{6M} + \frac{\varepsilon}{6M}) = \varepsilon$.

Ознака Абеля є наслідком озн. Діріхле. Справді, нехай вик. умови ознаки Абеля.

(a_n) – монот. і обм. $\rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = a$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ зб. $\rightarrow$ частк. суми обмежені. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(a_n - a)}_{=a_n' \text{ - монот.} \searrow 0} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a b_n$$

збіжний за озн. Діріхле; збіжний

Зауваження. Ознака Лейбніца є наслідком ознаки Діріхле. Справді, за озн. Лейбніца, якщо $a_n \searrow 0$, то ряд зб. Справді $b_n = (-1)^n$, $\left|\sum_{n=1}^{n_0} b_n\right| \le 1$, а $a_n' = a_n \searrow 0$ $\rightarrow$ за озн. Діріхле ряд збіжний.

Приклад Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \alpha n}{n^p}$.

Можна так: $\left|\frac{\sin \alpha n}{n^p}\right| < \frac{1}{n^p} \rightarrow$ за озн. порівняння

$p > 1$ – ряд збіжний

$p \le 1$ – ?

Для $p \geq 1$ дослідження
Діріхле за доп. ознаки

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{\alpha}{2} \sin k\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} [\cos(k-\tfrac{1}{2})\alpha - \cos$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \cancel{\sum_{k}} [\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2} + \dots + \cos$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} [\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha]$$

Тому $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right| \leq \left|\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Отже, $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\dfrac{1}{n^p} \searrow 0$ для $p > 0$. Таким чином, за озн. Діріхле ряд збіжний для $p > 0$.

Тому $\begin{cases} p > 1 \text{ – абсол. збіжність} \\ p > 0 \text{ – збіжність.} \end{cases}$

Чи збіж. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\sin n\alpha|}{n^p}$?

$$\frac{|\sin n\alpha|}{n^p} > \frac{\sin^2 \alpha n}{n^p} = \frac{1}{2}\frac{1 - \cos 2n\alpha}{n^p} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^p} - \frac{1}{2}\frac{\cos 2n\alpha}{n^p}.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2 n\alpha}{n^p} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p} - \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{\cos 2n\alpha}{n^p}$.

$0 < p < 1$,

ряд $\frac{1}{2}\sum\frac{\cos 2n}{n^p}$ - збіжний за Діріхле.

ряд $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ - розбіжний. Тому ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^p}$ - розб. → ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^p}$ розб.

Отже, для ряду $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^p}$:

$$\begin{cases} p>1 & \text{- абсолютна збіжність} \\ 0<p\le 1 & \text{- умовна збіжність} \end{cases}$$

Якщо розглянути ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^p}$, отримаємо аналогічний результат.

Нескінченні добутки.

Розглянемо послідовність

$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ (p_n)

Розгл. добутки:

$P_1 = p_1$

$P_2 = p_1 \cdot p_2$

$\vdots$

$P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$

$\ldots$

Отримали послідовність (P_n).

Озн. Послідовності (p_n) і (P_n) визначають нескінченний добуток, який позначатимемо символом

$\prod_{n=1}^{+\infty} p_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \ldots$

Якщо $\exists \lim_{n\to\infty} P_n = P$, то це є значення неск. добутку.

Озн. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P < \infty \wedge P \neq 0$, то добуток зветься збіжним.

Приклад

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$P_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1\cdot\cancel{3}}{2^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{4}}{\cancel{3^2}}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot 5}{\cancel{4^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{(n-1)}(n+1)}{n^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{2}.$$

Властивості неск. добутків.

(1) $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n\cdot\ldots$

(2) $p_{m+1}\cdot p_{m+2}\cdot\ldots\cdot p_{m+k}\cdot\ldots$ – залишок (1).

1° Якщо (1) – зб., то (2) – зб., і навпаки.

Зауважимо: $p_n \neq 0$

Розгл. $P_{m+k} = P_m\cdot P'_k \qquad P'_k = p_k\cdot p_{k+1}\cdot\ldots$

(1) – зб. $\leftrightarrow \exists\lim\limits_{k\to\infty} P_{m+k} \leftrightarrow \exists\lim\limits_{k\to+\infty} P'_k \leftrightarrow$ (2) – зб.

2° Якщо (1) – зб., то $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

Справді, $p_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$. (1) – зб. →

$$\to \exists\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} P_{n-1} \to \exists\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{P_{n-1}} =$$

$$= \frac{P}{P} = 1.$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$ – необх. умова збіжності неск. добутку.

3° Якщо (1) – зб., то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ – зб. і навпаки. Зауважимо, що якщо добуток зб., то p_n мають бути одного знаку (вважаємо, що додатні).

$P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$

$\ln P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln p_k$ – часткова сума ряду.

$\sum\limits_{k=1}^{n} \ln p_n = S_n$. $\quad P_n = e^{S_n}$

Якщо (1) – зб. $\to \exists \lim\limits_{n\to\infty} P_n \to$
$\to \exists \lim\limits_{n\to\infty} \ln P_n \to \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n \to$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ зб.

Якщо $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ – зб., то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln P_n \to$
$\to \exists \lim\limits_{n\to\infty} e^{S_n} \to \exists \lim\limits_{n\to\infty} P_n \to$ (1) – зб.

Ознаки збіжності неск. добутку.

1° $p_n = 1 + a_n$

Тоді за властивістю 3, неск. добуток $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$ збігається тоді і лише тоді, коли $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n)$ – зб.

Ознака 1. Якщо $a_n > 0$, то
$$\prod_{n=1}^{+\infty} p_n = \prod_{n=1}^{+\infty} (1+a_n) \text{ – зб.} \leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ – зб.}$$

▶ Порівняємо $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n)$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1 \to$ ряди $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+a_n)$ і $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ - зб

ються і розбіг. одночасно (важливо, що маємо ряди з дод. членами).

2° Ознака 2 Якщо ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ - зб., і ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ - зб., то неск. добуток (1) - зб. a_n - довільні.

Якщо a_n - зб. і a_n - з дод. член то ~~$a_k \le a_n$~~ a_n^2 - теж зб. ~~чому~~ ? (бо з деякого n $a_n^2 < a_n$ (бо $a_n <$ для деякого n)

Якщо ряд a_n - з довільними членами, то ряд a_n^2 мо бути і не збіжним.

▶ $\ln(1+a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$

$-\ln(1+a_n) + a_n = \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2) \to$

$\to$ (із збіжності $\sum a_n$ і $\sum a_n^2$ випливає збіжність ряду $\sum \ln(1+a_n) \to (1)$ - зб. ◀

Приклад $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$

Розгл. ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$.

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ і $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ зб. при

ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ - зб. при $p>\frac{1}{2}$. Тому по-

Лекція 18

①

Функціональні послідовності і ряди.

Протягом I та II семестру ми вивчали **числові** послідовності та ряди.

Для них розглянули поняття збіжності

Послідовність (x_n) збігається до a

$\lim x_n = a \overset{df}{=} \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\ [n>n_0 \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon]$

Ряд

$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots\ldots$

з членами (a_n) і (A_n) - послід. част. сум збігається до A, якщо $\lim A_n=A$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A \overset{df}{=} \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\ [n>n_0 \Rightarrow |A_n-A|<\varepsilon]$

В цьому розділі будемо вивчати **функціональні** послідовност та ряди

Для їх характеристики будемо розглядати два поняття збіжності:

- поточкова збіжність (або проста збіжність)
- рівномірна збіжність (яка включає просту збіжність)

Нехай задано $\forall n\ f_n: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f_n(x)$ $D(f_n) \subset \mathbb{R}^1$

Будемо позначати:

(f_n) - функц. послідовність, $(f_n(x))$ - числова послід.

Означення. (f_n) - збігаєтьс. в т. (x_0) $\overset{df}{=}$ $(f_n(x_0))$ - збігаєть.

Означ. (f_n) - збіг. на множ. E $\overset{df}{=}$

$\forall x\in E\ (f_n(x))$ - збігається.

Означ.

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ на $E \overset{df}{=} \forall x\in E\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

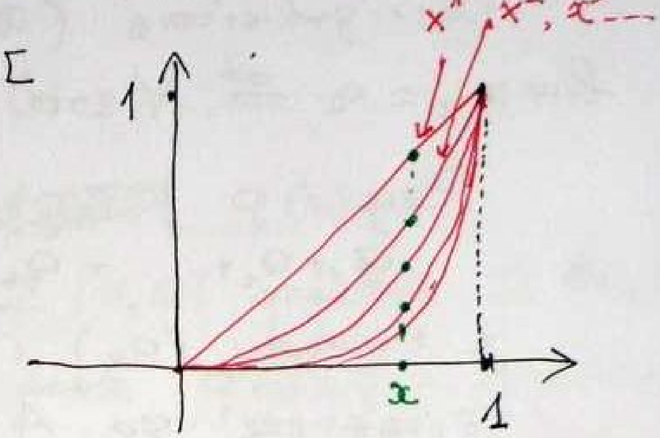
або

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \overset{def}{=} \forall x\in E\ \forall \varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(x,\varepsilon)\ \forall n$$

$$[n>n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon]$$

Приклад. $f_n(x)=x^n$ $\quad x\in E=[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\in[0,1[\\ 1 & x=1\end{cases}$$



$x\in[0,1[$ $\quad x^n\to 0$

$f_n\to f$ поточково

Нехай (u_n) послідовність функцій

Розглядаємо ряд

$$u_1+u_2+\dots+u_n+\dots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$f_n=u_1+u_2+\dots+u_n$, (f_n) - послідовність част. сум

Означ. Функц. ряд наз. збіжним на E $\overset{def}{=}$ (f_n) - збіжне на E

Означ. Функц. ряд. збіж. до f на E

$$\overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ на } E$$

Це поняття вивчали уже в школі.

Приклад. маємо ряд

$$1+x+\dots+x^n+\dots$$

$$f_n(x)=1+x+\dots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$$

Сума ряду $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\overset{\nearrow 0}{x^n}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$ для $|x|<1$

Дослідження збіжності функціональних рядів.

Тут виникає задача: Як знайти множину E на якій (в точках якої) збігається ряд?

Нехай дано ряд $\sum_{n=1}^{n} u_n(x)$

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$. Для нього знаходимо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = q(x)$$

Розв'яжемо нерівність $q(x)<1$

Для цих x ряд $\sum |u_n(x)|$, а також $\sum u_n(x)$ збіжні. Для x в яких $q(x)>1$ — розбіжні!

(Чому?)

Залишилося дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ для $q(x)=1$.

Аналогічно можна розглядати $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = q(x)$, як в ознаці Даламбера.

Будуть розглянуто і інші способи дослідження функц. рядів.

Приклад.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n x^n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\cdot |x|}{2} = \frac{|x|}{2} = q(x)$$

$q(x) = \frac{|x|}{2} < 1$, $|x|<2$, на якому $]-2,2[$ ряд збіжн.

Дослідимо в т. $|x|=2$ $x=2$, $x=-2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n$, $\sum \frac{n(-2)^n}{2^n}$ — ряди розбіжні

Відповідь. Ряд збіжн. на $]-2,2[$

В інших точках $q(x)>1$.

Рівномірна збіжність функціональних послідовностей та рядів.

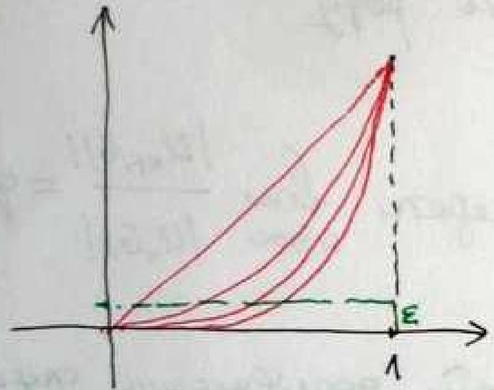
З прикладу збіжності функц. послідовності $f_n(x) = x^n$ бачили що для різних $x \in [0,1]$ $x^n \to 0$ „по різному", „не рівномірно"

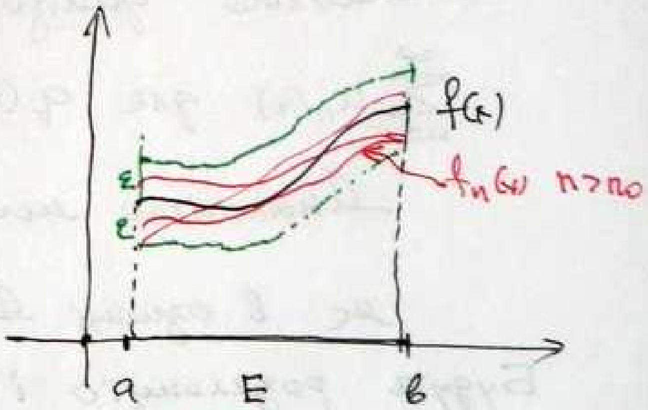
Означенн (точк. збіж)

$$f_n \underset{\text{на } E}{\to} f \overset{def}{=} \boxed{\forall x \in E}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ [n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Означення (рівном. збіж)

$$f_n \underset{\text{на } E}{\rightrightarrows} f \overset{def}{=} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n_0\ \boxed{\forall x \in E}\ [n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$





$\forall x \in E$ $\quad f(x) - \varepsilon < \boxed{f_n(x)} < f(x) + \varepsilon$

Приклад. $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2 x^2}$ $\quad E = [0,1]$

$$\forall x \in [0,1] \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{1 + n^2 x} = 0 = f(x)$$

f_n поточково збігається до $f(x) \equiv 0$. Чи рівномірно?

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2 x^2} \cdot \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n} \qquad \frac{2ab}{a^2 + b^2} < 1,\ a = 1,\ b = nx$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n_0 \forall x \in [0,1]\ [n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\cancel{2n}x}{1 + n^2 x^2}\right| < \frac{1}{2n} < \varepsilon]$$

" $[\frac{1}{2\varepsilon}]$

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} < n \quad n_0 = [\frac{1}{2\varepsilon}]$$

Нехай $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ $\quad E=[0,1]$

$\forall x\in[0,1]$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+n^2x^2} = 0 = f(x)$, $f_n \to f$

Тут збіжність не рівномірна

$$\boxed{\underset{\text{на } E}{f_n \not\rightrightarrows f} \overset{df}{=} \exists\varepsilon>0\ \forall n_0\ \exists n, x'\in E\ [n>n_0 \wedge |f_n(x')-f(x')| \geq \varepsilon]}$$

В нашому прикладі

$$\exists\varepsilon=\tfrac{1}{2}\ \forall n_0\ \exists n, \exists x=\tfrac{1}{n}\ \Big[n>n_0 \wedge \big|f_n(\tfrac{1}{n}) - f(x)\big| = \Big|\frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2(\frac{1}{n})^2} - 0\Big| = \frac{1}{2} = \varepsilon\Big]$$

Виконується означення $f_n \not\rightrightarrows f$ на E.

Критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності

<u>Кр. Коші</u>:

f_n - збіг. р-но на E $\Longleftrightarrow \{\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n,m,\ \forall x\in E$

$[n>n_0 \wedge m>n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon]$

Довед. (⇒) (необхідн)

$f_n \rightrightarrows f$ на $E \overset{df}{=} \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\ \forall x\in E\ [n>n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon/2]$

$\forall m\ \forall x\in E\ [m>n_0 \Rightarrow |f_m(x)-f(x)| < \varepsilon/2]$

$\{\Rightarrow\{\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n,m\ \forall x\in E\ [n>n_0 \wedge m>n_0 \Rightarrow$

$|f_n(x)-f_m(x)| = |f_n(x)-f(x)+f(x)-f_m(x)| < |\cdot|+|\cdot| < \varepsilon$

$\textcircled{\Leftarrow}$ (достатність)

З умови випливає, що $\forall x \in E$ $(f_n(x))$ – фунд. послід.

тому $\forall x \in E$ $(f_n(x))$ – збіжна $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

тобто $f(x) \overset{df}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Покажемо, що $f_n \rightrightarrows f$ на E

З умови маємо $\forall n > n_0$
$\forall m > n_0 \ \forall x \in E \ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

спрямуємо $m \to \infty$, отримаємо

$\forall n > n_0 \ \forall x \in E \ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$

Отже

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, \forall x \in E \left[n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \right]$$

$= f_n \rightrightarrows f$ на E

Критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду

Крит. Коші $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіг. р-но на $E \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, p \ \forall x \in E$
$[n > n_0 \Rightarrow |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon]$

Довед.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіг. р-но на $E \overset{df}{=} (f_n)$ – збіг. р-но, де $f_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$

$\overset{к.К}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, m \ \forall x \in E \left[n > n_0 \wedge m > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \right]$

$*$

$\Rightarrow$ при $m = n+p$. $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$

Ознаки збіжності функціональних рядів

Ознака Вейєрштрасса

Нехай для ряду $\sum u_n$ викон. умови

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \forall x\in E\ \ |u_n(x)|\le C_n \\ 2.\ \sum C_n \text{ - збіжн.} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ - збіжн. р-но на } E$$

Дов.

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{ - збіг. } \overset{\text{кр. } K}{\Longrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n,p\ [\ n>n_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |C_{n+1}+C_{n+2}+\dots+C_{n+p}|<\varepsilon\ ]$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x\in E\ \ |u_{n+1}(x)+\dots+u_{n+p}(x)| < |u_{n+p}(x)|+\dots+|u_{n+p}(x)| \le$$

$$|C_{n+1}+C_{n+2}+\dots+C_{n+p}|<\varepsilon$$

Виконується кр. Коші рівном. збіж. ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin xn}{n^2}$ $\left|\frac{\sin xn}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin xn}{n^2}$ - р. зб.

Ознаки Абеля і Діріхле

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ $u_n(x), v_n(x)$ – функції

Ознака Абеля

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ - рівном. зб. на } E \\ 2.\ (u_n) \text{ монот. і рівн. обм.} \\ \quad \exists M\ \forall x\in E\ [|u_n(x)|\le M] \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \text{ - рівн. збіжн. на } E$$

Ознака Діріхле

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \text{част. суми ряду } \sum v_n \text{ - р. обм.} \\ \quad \exists L\ \forall x\in E\ |\sum_{n=1}^{N} v_n(x)|<L \\ 2.\ (u_n)\text{ - монот.} \wedge u_n \rightrightarrows 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \text{ - рівн. зб. на } E$$

II. Функціональні ряди

Збіжність функціональних послідовностей та рядів.

$\forall n \ f_n : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f_n(x)$

(f_n) - функц. послідовність $(f_n(x))$ - по суті числова послідовність.

Озн. (f_n) - зб. в т. x_0 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(f_n(x_0))$ - зб.

Озн. (f_n) - зб. на множині $E \overset{def}{=}$ $\forall x \in E$ $(f_n(x))$ - збіжена.

Означ. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ на E $\overset{def}{=}$ $\forall x \in E$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Познач. $f_n \to f$ на E.

$f_n(x) = x^n \quad E = [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Множина збіжності. E - мн. збіжності функц. послідовності (f_n) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \in E$ $(f_n(x))$ - зб.

$f_n(x) = x^n \quad E =]-1, 1]$

Розгл. (u_n) - послідовність ф-ій.

Розгл. ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1)

З ним зв'язано послідовність (f_n) - посл. частк. сум
$f_n = u_1 + \dots + u_n$

Озн. 1 Ряд (1) зб. на мн. E до ф-ії f $\overset{def}{\Leftrightarrow}$
$f_n \to f$ на E

Пр-д. $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$ $|x|<1$

$S_n(x) = 1 + \dots + x^n = \frac{1-x^n}{1-x}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ $|x|$

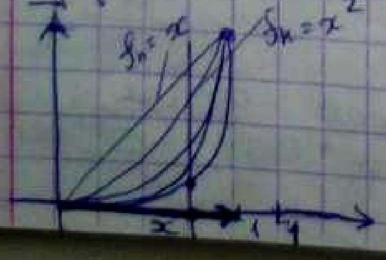
Нехай маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

Розгл. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = q(x)$. Розв'язуємо нерівність $q(x) < 1$ Для x, що задовільн. нерівність ряд зб.
$q(x) > 1$ - для цих x ряд розб.
$q(x) = 1$ - для цих x ряд треба дослідж. далі
Так само можна користуватись ознакою Даламбера.

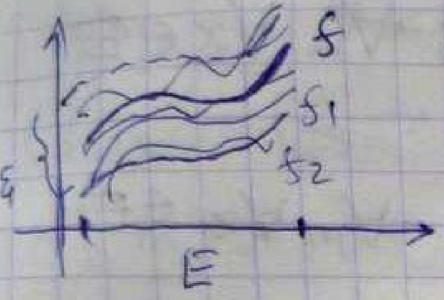
Рівномірна збіжність функціональних послідовностей і рядів.

Озн. $f_n \to f$ на $E \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \overset{n_0(x,\varepsilon)}{n_0} \in \mathbb{N}$ $\forall n\ [n > n_0 \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$.

Озн. (рівномірн. збіжність)
$f_n \rightrightarrows f$ на $E \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n\ \forall x\ [n > n_0 \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$.



$f: [0,1] \to \mathbb{R}$
$f_n(x) = x^n$ - збіжна.
Чи рівномірно збіжна? Н



Рівн. зб. означає, що якщо взяти $\forall\varepsilon$, то починаючи з деякого n_0, всі f_n знаходяться в коридорі

Пр-д. 1. $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ $E=[0,1]$.

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. Чи збігається (f_n) рівномірно?

$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}\cdot\frac{1}{2n}$ $\left(\forall a,b\ \frac{2ab}{a^2+b^2}\le 1\right) \to$

$\to f_n(x) \le \frac{1}{2n}$ $\forall x\in E$. Тому $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0$

$\forall n\,\forall x\,[n>n_0 \to |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon]$

Знайдемо n_0: $\frac{1}{2n}<\varepsilon \to n>\frac{1}{2\varepsilon} \to n_0=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$

2. $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ $E=[0,1]$.

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

(~~$f_n(x) \le \frac{1}{2}$~~ [illegible])

Для довільного n візьмемо $x=\frac{1}{n}$.

$f_n \not\rightrightarrows f \overset{def}{\iff} \exists\varepsilon>0\ \forall n_0\ \exists n\ \exists x\in E\,[n>n_0 \wedge$

$\wedge |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon]$

Маємо: $\varepsilon=\frac{1}{2}$ ~~A~~ $\forall n_0\ \exists n\ \exists x=\frac{1}{n}\,[n>n_0 \wedge$

$\wedge |f_n(x)| \ge \frac{1}{2}]$

Критерій Коші рівномірної збіжності послідовності.

(f_n) — зб. рівномірно на $E \iff \forall\varepsilon>0$

$\exists n_0\ \forall m,n\ \forall x\in E\,[n>n_0 \wedge m>n_0 \to |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

▶ (⇒) $f_n \rightrightarrows f$ на E $\overset{def}{}$ $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\ \forall x\in E$ $[n>n_0 \to |f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}]$

$\forall m\ \forall x \in E$ $[m>n_0 \to |f_m(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}]$.

Отже, $|f_n(x)-f_m(x)| \le |f_n(x)-f(x)| + |f_m(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(⇐) З умови випливає, що $\forall x \in E$ $(f_n(x))$ - фундаментальна $\to \forall x\in E$ $(f_n(x))$ - збіжна $\to f(x) \overset{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Ми маємо, що $\underset{\forall m>m_0}{\forall n>n_0}\ \forall x\ |f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon$.

Нехай $m\to\infty$. Тоді $|f_m(x)-f_n(x)| \to |f_n(x)-f(x)| \le \varepsilon$

Отже, $\forall n>n_0\ \forall x\in E\ |f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$ — умова рівномірн. збіжності ◀

Розгл. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - функціональний ряд.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ зб. рівномірно до f на E $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f_n \rightrightarrows f$ на E.

Критерій Коші рівномірної збіжності функц. ряду.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ зб. рівномірно на E $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n,p\ \forall x\in E\ [n>n_0 \to |u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon]$.

▶ Випливає з кр. К. для послідовностей.

$u_n \rightrightarrows f$ на E $\overset{def}{=}$ $f_n \rightrightarrows f$ на E $\overset{кр.\ К}{\longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0$

$\forall n, m \ \forall x \in E \ [\, n > n_0 \wedge m > n_0 \to |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon \,]$

Але $|S_n(x) - S_m(x)| = |u_{n+1}(x) + \ldots + u_m(x)| =$

$= |m = n+p| = |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$ ⊓.

Ознаки збіжності функц. рядів

Ознака Вейєрштрасса. Нехай для ряду $\sum u_n$ викон. умови:

$\forall x \in E \ |u_n(x)| \le c_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ – зб.

Тоді $\sum u_n$ – збіг. рівномірно на E

▶ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ – зб. $\overset{кр.К}{\Longleftrightarrow}$ $\{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, p \ [\, n > n_0 \to$

$\to |c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p}| < \varepsilon \,]$

$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \le |u_{n+1}(x)| + \ldots +$

$+ |u_{n+p}(x)| \le c_{n+1} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon. \ \forall x \in E.$

Тому Отримали кр. К. рівном. зб. функц. ряду. ◀

Пр-д. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} xn}{n^2}}_{u_n(x)} \quad x \in R$

$\left| \frac{\operatorname{arctg} xn}{n^2} \right| \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad \sum \frac{1}{n^2} < \infty \to$ ряд зб. рівномірно.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} \qquad \left| \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} \right| \le \frac{|x|}{n^2} \le \quad [-a, a]$

$\le \frac{a}{n^2}$

Отже, цей функц. ряд є рівномірно зб. на довільн. відрізку.

Ознаки Абеля і Діріхле

Розгл. ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$, де u_n, v_n – ф-ції

Ознака Абеля. Нехай для (1) вик.:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – рівном. зб. на E
2. (u_n) – монотонна і рівном. обмеж. на E – $\exists M \ \forall x \in E \ |u_n(x)| \leq M$.

Тоді (1) зб. рівномірно на E.

Ознака Діріхле. Нехай для (1) вик.:

1. частк. суми $\sum_{n=1}^{N} v_n$ – рівном. обмеж. $\exists L \ \forall x \in E \ \forall N \ \left|\sum_{k=1}^{N} v_n(x)\right| < L$
2. $(u_n(x))$ – монот., ~~$u_n(x)$~~ $u_n \rightrightarrows 0$.

Тоді (1) – рівном. зб. на E.

Довне – за тією ж схемою, що для числових рядів.

▶ Розгл. $\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=1}^{p} u_{k+n}(x) v_{k+n}(x) =$

$= u_{n+p}(x) V_{n+p}(x) - \sum_{k=1}^{p-1} [u_{n+k+1}(x) + u_{n+k}(x)] V_{k+n}$

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x)\right| \leq |u_{n+p}(x)| |V_{n+p}(x)| +$

$+ \sum_{k=1}^{p-1} |u_{n+k+1}(x) - u_{n+k}(x)| |V_{n+k}| \leq$

$\leq 2L (|u_{n+p}(x)| + \sum | \quad |) =$

$= 2L (|u_{n+p}(x)| + |\sum(\,)|) < 2L (2|u_{n+p}(x)|$

$+ |u_{n+1}(x)|) < 2L \cdot 3\varepsilon$. ◀

(з монот ↘ a_n до 0)

Пр-ди 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ $\frac{1}{n} = u_n$, $\sin nx = v_n(x)$

т. u_n - монотонна $\searrow 0$ - рівномірно. Як в ознаці Діріхле. 2. $|\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin Nx| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \to$

$\to \frac{x}{2} \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$ $\frac{\alpha}{2} \le x \le 2\pi - \frac{\alpha}{2}$ – в цьому проміжку даний ряд зб. рівномірно.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2+x^2}$ $\left|\frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2+x^2}\right| \le \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2}$ – зб.

Властивості рівномірно збіжних послідовностей і рядів.

Лекція 19

Властивості рівномірно збіжних послідовностей і рядів

Для функціональних послідовностей та рядів цікавими будуть такі питання.

1. Якщо $\forall n$ $f_n(x)$ $x \in E$ є неперервні, то чи гранична ф-ія $f(x) = \lim f_n(x)$ є неперервна?

Згадаємо ф-ію $f_n(x) = x^n$ $x \in [0,1]$

2. Якщо $\forall n$ $u_n(x)$ $x \in E$ неперерні, то чи сума ряду $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ є неперервна?

3. Чи мають місце рівності:

а) $$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim u_n(x)$$

б) $$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

в). $$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

г) $$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x) dx \quad ?$$

Зауважимо, що для скінченних сум властивості 2, 3 а), б), в) виконуються.

В теоремах про властивості функціональних послідовностей та рядів важливу роль відіграє рівномірна збіжність

1° Неперервність граничної функції та суми ряду

Теорема (про непер. гран. ф-ії)

Нехай посл. ф-ій (f_n) визн. на E і

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \forall n\ f_n \text{ непер. на } E \\ 2)\ f_n \rightrightarrows f \text{ на } E \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ - непер. на } E$$

Дов. Нехай $\forall f_n$ непер. т. $x_0 \in E$

$\forall \varepsilon > 0$, візьмемо $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$

① $f_n \rightrightarrows f$ на $E \Rightarrow \varepsilon_1 > 0\ \exists n_0\ \forall n\ \forall x \in E$

$[n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1]$

Для $n = n_0+1$ f_{n_0+1} - непер в т. $x_0 \in E \Rightarrow$

② $\Rightarrow \varepsilon_1 > 0\ \exists \delta\ \forall x \in E\ [\,|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(x_0)| < \varepsilon_1]$

Покажемо непер. $f(x)$ в т. x_0

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0+1}(x) + f_{n_0+1}(x) - f_{n+1}(x_0) + f_{n_0+1}(x_0) - f(x_0)| \le$$

$$\le |f(x) - f_{n_0+1}(x)| + |f_{n_0+1}(x) - f_{n+1}(x_0)| + |f_{n_0+1}(x_0) - f(x_0)| <$$

ε_1 з (1), бо $n_0+1 > n_0$

ε_1 з (2) бо $|x - x_0| < \delta$

ε_1 з ①

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

Отримали $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ [\,|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$

Тому f непер. в т. $x_0 \in E$

Теорема (про непер. суми ряду)

$$\text{Нехай } \left.\begin{array}{l} 1)\ \forall n\ u_n(x) \text{ непер. на } E \text{ і} \\ 2)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ збіг. рів.} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x) \text{ - непер. } E$$

Довед.

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ - збіг. р-но} \Big\} \Rightarrow f_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x),\ f_n(x) \rightrightarrows f(x) \\ \qquad 1) \Rightarrow f_n(x) \text{ - непер} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{з непер. Теор}}$$

$f(x)$ - непер.

Теореми Діні

I Для послідовності

Нехай $\forall n$ f_n визначені на $[a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \forall n\ f_n \text{ непер на } [a b] \\ 2.\ f_n \text{ моност. по } n \\ 3.\ f_n \to f \text{ збіг. на } [a b],\ f\text{-непер} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \rightrightarrows f \text{ на } [a b]$$

II Для рядів

Нехай $\forall n$ u_n - визн. на $[a b]$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \forall n\ u_n\text{-непер. } [a,b] \\ 2.\ \forall n\ \forall x \in [a b]\ \ u_n(x) \geq 0 \\ 3.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x) \text{ неп. } [a b] \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ зб. рівн. на } E$$

Друга теорема є наслідком першої. Це випливає з того, що $f_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$, і т.д.

Теорема про граничний перехід

Теорема. Нехай $\forall n$ u_n - визначені на E

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \forall n\ \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = C_n \quad x_0 \in E \\ 2.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ - збіг. рівн. до } f \text{ на } E \end{array}\right\} \Rightarrow$$

1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ - збіжн.

2). $\lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Інтегрування функціональної послідовності і ряду.

Теорема. Нехай $\forall n$ f_n - визначене на $[a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \forall n\ f_n\text{- непер. на } [a,b] \\ 2.\ f_n \rightrightarrows f \text{ на } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Дов. Розглянемо різницю

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| = \left| \int_a^b \left[f(x) - f_n(x) \right] dx \right| \le$$

$$\le \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \le$$

З рівн. збіжн. $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \; \exists n_0 \; \forall n \; \forall x \in [a,b]$

$$[n>n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Тому $< \int_a^b \varepsilon \, dx = \varepsilon(b-a)$

Маємо $\forall \varepsilon>0 \; \exists n_0 \; \forall n>n_0 \; \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| < \varepsilon(b-a)$,

тому $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Теорема (про почленне інтегр. функц. рядів)

Нехай $\forall n \; u_n$ - визн. на $[a,b]$

1) $\forall n \; u_n$ - непер. на $[a,b]$
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіг. р-но на $[a,b]$ до $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

Доведення. $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \lim \int_a^b \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx$$

Тут використали попередню теорему про граничний перехід.

Теорема про почленне диференціювання

Теорема. Нехай $\forall n$ u_n визначені на $[a,b]$

1. $\forall n$ u_n – диференц. на $[a,b]$, $u_n'(x)$ – непер.

2) $\exists x_0 \in [a,b]$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = f(x_0)$

$\sum u_n(x) = f(x)$, рег збіж. на $[a,b]$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ – збіг. рівн. на $[a,b]$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

Довед. Позначимо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = g(x)$. З попередньої теореми маємо

$$\int_{x_0}^{x} g(x)dx = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(x)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

З неперрв. $u_n'(x)$ і рівномір. збіжності $g(x)$ – непер. ф-ія.

Тоді

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} g(x)dx = \frac{d}{dx}\left(f(x) - f(x_0)\right)$$

$$\|$$

$$g(x) = f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'$$

$$\|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)\,dx = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'$$

Приклади.

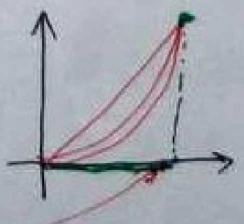
① $f_n(x) = x^n$ непер. $[0,1]$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & x\in[0,1[\end{cases}$ – розривна

$\| \ f(x)$

Оскільки, $x^n \not\rightrightarrows f(x)$

збіжність не рівномірна

$\exists \varepsilon>0 \ \forall n_0 \ \exists n \ \exists x \ [n>n_0 \wedge |x^n - f(x)| \geq \varepsilon]$



$\exists \varepsilon = \frac{1}{2}$ Візьмемо для $n > n_0$ $x' = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$

2\. Довести, що $f(x)$ - непер. і $f'(x)$ - непер.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$$

Дов. f - неп. ∨ $u_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^3}$ - непер.

∨ $\sum u_n(x)$ - збіг. р-но на $\mathbb{R}$ за ознакою Вейєрштраса

$$\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3} \qquad \sum\frac{1}{n^3} \text{ - збіжн.}$$

Теорема $\left.\begin{array}{l} u_n \text{ - неп.} \\ \sum u_n \text{ - зб. рівн.} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)$ - непер.

Дов. $f'(x)$ - неп.

∨ $\sum u_n(x)$ - збіжн.

∨ $u_n'(x) = -\dfrac{\sin nx}{n^2}$ - непер.

∨ $\sum u_n'(x) = -\sum\dfrac{\sin nx}{n^2}$ - збіг. рівн. за Вейєршт.

Тому $f'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}$, $f'(x)$ - непер. доведення як в попередн. випадку

Властивості рівномірно збіжних послідовностей і рядів

1. Неперервність граничної функції і суми ряду

Теорема Нехай є (f_n) на E,

1. $\forall n$ f_n - непер в $x_0 \in E$.
2. $(f_n) \rightrightarrows f$ на E.

$\Big\} \to f$ - непер. в т. x_0

► Задамо $\forall \varepsilon > 0$. Візьмемо $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$.

$f_n \rightrightarrows f$ на $E \Rightarrow \forall \varepsilon_1 > 0\ \exists n_0\ \forall n, \forall x \in E$
$[n > n_0 \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1]$

Візьмемо $n = n_0 + 1$ f_{n_0+1} - непер. в $x_0 \in E \Rightarrow$
$\varepsilon_1\ \exists \delta\ \forall x \in E\ [|x - x_0| < \delta \to |f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(x_0)| < \varepsilon_1$

$< \frac{\varepsilon}{3}$ за вибором $n > n_0$

Розглянемо $|f(x) - f(x_0)| = |\underbrace{f(x) - f_{n_0+1}(x)} + \underbrace{f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(x_0)} + \underbrace{f_{n_0+1}(x_0) - f(x_0)}| \le |\quad| + |\quad| + |\quad| <$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ (взяли $|x - x_0| < \delta$)

Тому $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall x [|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

Отже f - непер. в x_0. ◄

Теорема (про неперервність суми ряду) Нехай ф-я $u_n(x)$ визначена на E, $\forall n$ u_n - непер. в x_0, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ - рівном. зб. до f на E.

Тоді f - непер в x_0.

► Справді, розгл. $f_n = u_1 + \dots + u_n$ з рівномірн. зб. ряду маємо $f_n \rightrightarrows f$ на E

як Σ непер. ф-ій).

З непер. u_n маємо f_n непер. в т. x_0 $\forall n$

→ f - непер. (з непер. т-ми) ◄

Теорема Діні. Нехай $\forall n$ f_n - визначені на

a, b]. 1. $\forall n$ f_n - непер на $[a,b]$
2. f_n - монот. по n
3. f_n зб. до f - непер. на $[a,b]$

$\Big\} \rightarrow f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b$

Теорема Діні (для рядів) Нехай $\forall n$ u_n - визн

чені на $[a, b]$ і
1. $\forall n$ u_n - непер. на $[a,b]$
2. $\forall n$ $\forall x \in [a,b]$ $u_n(x) \geq 0$
3. $\sum u_n = f$ - непер на $[a,b]$

$\Bigg\} \rightarrow \sum u_n$ зб. рівномірно до f на $[a,b]$.

u_n - непер. → $f_n = u_1 + \dots + u_n$ - непер.

$u_n(x) \geq 0$ → $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ → f_n - монот.

$\sum u_n$ зб. до $f \Rightarrow f_n$ зб. до f.

↓

$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \sum u_n$ - зб. рівномірно до f.

2. Теорема про граничний перехід

Нехай $\forall n$ u_n - визначені на E, і
1. $\forall n$ $\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = C_n$ $x_0 \in E$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - зб. рівном. до f на E

$$\Bigg\} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{ - зб.} \quad \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n = C$$

$(\sum \lim u_n(x) = \lim \sum u_n(x))$

► $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - зб. рівномірно до f на E $\xrightarrow{\text{кр. К.}}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\forall n, p$ $\forall x \in E$ $[n > n_0 \rightarrow |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{4}]$

$\forall x \in E$ $|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Розгл. $\lim\limits_{x \to x_0} |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| = |C_{n+1} + \dots + C_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{3}$ → за кр. Коші для ряду → $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} C_n$ - зб.

$$|f(x)-C| = |S_n(x) + r_n(x) - C_n - r_n| \le$$

$$\le |S_n(x) - C_n| + |r_n(x)| + |r_n| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} [u_n(x) - C_n]\right| + |r_n(x)| + |r_n|$$

$r_n(x) = f(x) - S_n(x)$, $r_n = C - C_n$.

$\underline{\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - C) = 0} = \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x [|x - x_0| < \delta \to |f(x) - C| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $\sum C_n$ - зб. для $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$ знайдемо n':
$\forall n\ [n > n'_0 \to |C_n - C| < \frac{\varepsilon}{3}]$

u_n - зб. рівномірно $\to S_n \rightrightarrows f \to \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$

$\exists n''\ \forall n\ \forall x \in E\ [n > n''_0 \to |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1]$

$n_0 = \max\{n', n''\}$ [illegible]

для $\varepsilon\ \exists \delta\ \forall x \in E\ |x - x_0| < \delta \to |u_k(x) - \overset{C_k}{\cancel{u_k(x_0)}}| < \frac{\varepsilon}{3n}$
(n - зафіксоване, $n > n_0$).

Отже, $\sum_{k=1}^{n} [u_k(x) - C_k] < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{3n} = \frac{\varepsilon}{3}$.

Отже, якщо $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - C| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. ◄

3. Інтегрування ряду (почленне інтегрування ряду).

Теорема. Нехай $\forall n$ S_n - визначена на $[a, b]$

1. $\forall n$ S_n - неперер. на $[a, b]$
2. $S_n \rightrightarrows S$ на $[a, b]$

$$\left.\begin{matrix}1.\\2.\end{matrix}\right\} \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

▶ Розгл. $\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \right| = (*)$

$f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b] \to \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall x \in [a,b] \ \forall n$ $[n > n_0 \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Тому $(*) < \left| \int_a^b \varepsilon dx \right| = \varepsilon |b-a|$ $n > n_0$, що і треба було довести, бо $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ ◀

Теорема Нехай $\forall n$ u_n – визначені на $[a,b]$,
1. $\forall n$ u_n – непер. на $[a,b]$
2. $\sum u_n$ – зб. рівном. до f

$\Bigg\} \to \int_a^b f(x)dx =$

$$= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} u_k(x)dx =$$

lim част. суми – це сума ряду

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx$$

▶ $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$

$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ на (1) застосована доведена теорема ◀

4. Теорема про почленне диференціювання ряду.

Теор. Нехай u_n – визначені на $[a,b]$ $\forall n$
1. u_n – диферен. на $[a,b]$ $\forall n$ u'_n – непер
2. $\exists x_0 \in [a,b]: \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = f(x_0)$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ – зб. рівном.

$\Bigg\} \to \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

▶ Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = g(x)$. Розгл. $\int_{x_0}^{x} g(x)dx =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u'_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = f(x) - f(x_0)$

Врахуємо: $g(x)$ – непер. $\to \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} g(x)dx =$
$= (f(x) - f(x_0))' = f'(x) = g(x)$.

Остаточно, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = f'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]'$ ◄

Пр-д. $f_n(x) = x^n$ $\forall n$ f_n – непер., але гранична ф-я $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0 & x \neq 1 \end{cases}$ – розривна (бо $f_n \not\rightrightarrows f$)

Задача. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$

1. Показати, що $f(x)$ – непер.;
2. $f(x)$ – дифер.

1. Справді, $u_n = \frac{\cos nx}{n^3}$ – непер.

Тепер $|u_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$ → за озн. Вейєрш

$u_n(x)$ – рівн. зб.

2. Продифер. ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin nx}{n^2}$ – він знов зб рівномірно → $f(x)$ – дифер.

Чи похідна непер.? Так. Див. 1.

Лекція 20

Степеневі ряди

Будемо вивчати частковий випадок функціональних рядів

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при $u_n(x) = a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

зокрема при $x_0=0$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$ (1)

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + \dots -$

1. Множина збіжності

Розглянемо степеневі ряди

$$\underset{①}{\sum \frac{x^n}{n!}}; \quad \underset{②}{\sum n!\, x^n}, \quad \underset{③}{\sum x^n}, \quad \underset{④}{\sum \frac{x^n}{n}}, \quad \underset{⑤}{\sum \frac{x^n}{n^2}}$$

За озн. Даламбера

① $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1}/(n+1)!}{\dfrac{x_n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{n+1} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\underline{\text{ряд збіжн.}}$

② $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\; x^n} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)x = \infty$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus 0$ $\underline{\text{ряд зб. т. } 0}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x| < 1$, зб. $]-1,1[$

(4) $\lim \left| \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \right| \cdot \left| \dfrac{n}{x^n} \right| = |x| < 1$, зб. , $[-1,1[$

(5) зб. $[-1,1]$, оскільки $\sum \frac{1}{n^2}$ - збіжн.

Множ. збіжності може бути довільна

(При $|x|<1$, лише розгляд. $x=1$, $x=-1$

$|x|>1$ – ряд розбіжн.)

Лема Абеля. Нехай ряд (1) збігається в т. x_0

Тоді $\forall x \ |x|<|x_0|$ (1) збігається абсолютно

Дов. Маємо, що $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ - збіжний

Візьмемо $\forall x \ |x|<|x_0|$. Тоді

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \qquad q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$$

Зі збіжності $\sum a_n x_0^n \Rightarrow \lim a_n x_0^n = 0 \Rightarrow$

$(a_n x_0^n)$ - обм. $\Rightarrow \exists M \ \forall n \ |a_n x_0^n| \le M$

Отже, $|a_n x^n| \le M q^n$, $q<1$

З збіжн. $\sum q^n \Rightarrow$ зб. $\sum M q^n \Rightarrow$ зб. $\sum |a_n x^n|$

З леми випливає, що множиною збіжності степеневого ряду буде інтервал, відрізок, або півінтервал

Радіус збіжності

Розглянемо множину $\{|x| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \text{збіжн.}\}$

Означ. $R \overset{df}{=} \sup \underset{\overset{\shortparallel}{E}}{\{|x| \mid \sum a_n x^n - \text{збіжн.}\}}$

R - радіус збіжності

Теорема. Нехай R - радіус збіжності ряду (1). Тоді

1. При $R<\infty$ $\forall x \ |x|<R$ ряд зб.
   $\forall x \ |x|>R$ ряд розб.

2. При $R=+\infty$ $\forall x$ ряд збіжн.

Дов. 1. $\forall x \quad |x| < R = \sup\{ \quad \}$

За озн. sup $\exists x_0 \quad |x| < |x_0| < R, \ x_0 \in E$ і $\sum a_n x_0^n$ - зб.

з леми Абеля $\sum a_n x^n$ - зб.

$\forall x \quad |x| > R$ якщо б $\sum a_n x^n$ - збігався,

то для $x-\varepsilon$ збіг. абсолютно $\boxed{x-\varepsilon > R}$ що протиріч. озн. R.

Теорема Коші-Адамара.

Нехай $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$. Тоді

1. $\ell = 0 \Rightarrow R = \infty$
2. $\ell = +\infty \to R = 0$
3. $0 < \ell < \infty \to R = 1/\ell$

Довед. Приведемо означення

$$\overline{\lim}\, x_n = a \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1.\ \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ [x_n < a+\varepsilon] \\ 2.\ \forall \varepsilon>0\ \forall n'\ \exists n>n'\ [a-\varepsilon < x_n] \end{cases}$$

1. $\ell = 0$ Потрібно показати, що $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum a_n x^n$ - зб.

$\ell = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = 0 \Rightarrow$

за озн. Коші ряд збіжен.

3. $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} |x| \, \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \ell < 1$

для $|x| < 1/\ell$ ряд збіжн. $R = 1/\ell$

2. довед. аналог.

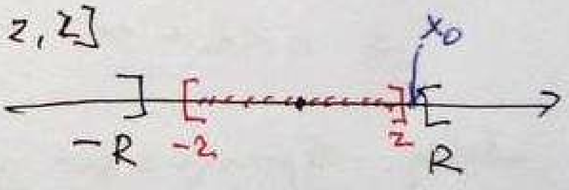
Зауваження.

1. Ми в доведенні користувалися ширшою ознакою Коші
2. Ми користувалися властивостями $\overline{\lim}$
3. Практично часто користуються.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad R = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Властивості степеневих рядів

1. Нехай R – радіус зб. степеневого ряду (1), тоді $\forall z$ $[-z, z] \subset]-R, R[$ ряд (1) збіг. рівномірно на $[-z, z]$



Дов. Нехай $|x_0| \in]z, R[$

$\sum a_n x_0^n$ - збіжний $\Longrightarrow$ $\sum |a_n z^n| < \infty$ (Лема Абеля)

Тепер. $\forall x \in [-z, z]$ $|a_n x^n| \le |a_n z^n|$

З ознаки Вейєрштрасса $\sum a_n x^n$ - збіг. р-но на $[-z, z]$

2. Сума ряду $\sum a_n x^n = f(x)$ є неперервною функцією в інтервалі $]-R, R[$

Довед. $\forall x \in]-R, R[$

$\exists z$ $|x| < |z| < R$

За доведен. на $[-z, z]$ - збіж. ряду рівномірна $\Rightarrow$ сума ряду непер. ф-ія на $[-z, z]$ і в т. x

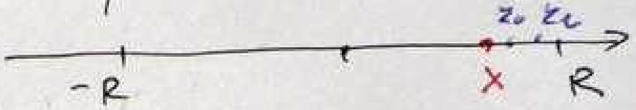
Заув. Неперервність локальна властив.

3. В інтервалі збіжності степеневого ряду]-R, R[можна степ. ряд почленно диференціювати (тобто сума ряду дифер. ф-ія) і

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_k x^{n-1}$$

Доведення. Покажемо, що радіус збіжності продифер. ряду не більший R (радіуса зб. р (1))

Нехай $x \in \,]-R, R[$. Виберемо $|x| < z_0 < z_1 < R$



Тоді

$$|n a_n x^{n-1}| < n|a_n||z_0|^{n-1} = n|a_n z_1^{n-1}| \left| \frac{z_0}{z_1} \right|^{n-1}$$

$$\sum a_n z^n \text{ - зб} \overset{\exists M}{\Rightarrow} |a_n z^{n-1}| \le M$$

Тому

$$|n a_n x^{n-1}| \le n M_1 \left| \frac{z_0}{z_1} \right|^{n-1} = n M_1 q^{n-1} \quad q < 1$$

$\sum n q^{n-1}$ - збіжний за Коші $\quad \sqrt[n]{n q^n} = \sqrt[n]{n}\, q \to q < 1$

Показали $\forall x \in \,]-R, R[$ ряд $\sum n a_n x^{n-1}$ - збіж.

а також $\sum n |a_n| |z_0|^{n-1} \le \sum n M q^{n-1}$ -

це означає, що на $[-z_0, z_0]$ продиф. ряд збігається рівномірно

Тому $\forall x \in \,]-R, R[\;\; \exists z_0 \;\; x \in [-z_0, z_0]$

в якій можна почленно диф.

Почленне інтегрування степеневого ряду

$\forall\, x \in \,]-R, R[$ розглянемо $[a, x] \subset \,]-R, R[$

на $[a, x]$ функц. ряд збіг. рівномірно

тому $$\int_a^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n x^n dx$$

Степеневі ряди

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $u_n(x) = a_{n-1}(x-x_0)^n$, (a_n) - числова послідовність, $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ – степеневий ряд.

Будемо розгл. частк. випадок – $x_0 = 0$.

1. Множина збіжності

Розгл. степеневий ряд (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Якщо $x = 0$, то (1) - зб.

Пр-д. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Озн.-Даламб.: $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$

Тому $\forall x \in \mathbb{R}$ ряд зб.

$\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$ Озн. Даламб. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} =$ ~~lim~~

$= \lim_{n\to\infty} (n+1)x = \infty$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{n}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} \cdot n = |x|$.

Отже, для $|x| < 1$ ряд зб. для $x = \pm 1$ треба досліджувати, $|x| > 1$ – розб. Але при $x = 1$ ряд розб., при $x = -1$ – зб. Отже, остаточно, множина збіжності : $[-1; 1[$.

Лема Абеля. Нехай (1) – збіг. в т. x_0. Тоді $\forall x : |x| < |x_0|$ (1) збігається абсолютно.

▶ Дано, що (2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ – зб. Візьмемо $\forall x : |x| < |x_0|$. Розгл. $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$

із зб. ряду (2) $\lim_{n\to\infty} |a_n x_0^n| = 0 . \to$

$\to \exists M \forall n\ |a_n x_0^n| \le M$

Отже, $|a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M q^n$.

$q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ – зб. $\to \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – зб.

За озн. порівняння ◀

Отже, множиною збіжності може бути інтервал, півінтервал, або відрізок.

Пр-д. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, – зб. на $]-1, 1[$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ – зб. на $[-1, 1[$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{n^2}} = |x|$ – зб. на $[1, 1]$.

Розглянемо $\{|x| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – зб.$\}$ $= E$,

Озн. $\sup_{x \in \mathbb{R}} \{|x| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – зб$\} = R$ R зветься радіусом збіжності (1).

Теорема 1. $R < \infty$ Нехай R – радіус зб. (1). Тоді для $|x| < R$ аб. зб., для $|x| > R$ а) – розб.

2. якщо $R=+\infty$, то $\forall x$ (1) - зб.

▶ Нехай $|x|<R$. Тоді за озн. sup, $\exists |x_0| \in E$ $|x|<|x_0|<R$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ - зб.

Тоді за лемою Абеля ряд $\sum a_n x^n$ - зб.

Нехай $|x|>R$. Якщо б ряд $\sum a_n x^n$ - зб., то $x-\varepsilon=\varepsilon+R \in E$, що протирічило б означенню $(\varepsilon=\frac{R-|x|}{2})$ sup.

2. - випливає з означення E. ◀

Теорема Коші-Адамара. Нехай $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=L$. Тоді
1. $L=0 \to R=\infty$
2. $L=\infty \to R=0$
3. $0<L<\infty \to R=\frac{1}{L}$.

▶ $$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a \overset{def}{=} \begin{cases} 1.\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ x_n<a+\varepsilon \\ 2.\ \forall\varepsilon>0\ \forall n'\ \exists n^*>n'\ a-\varepsilon<x_n \end{cases}$$

1. $L=0$. Треба показати, що $\forall x \in R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - зб. Маємо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0=$ (домножимо і зліва і справа на x) $=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=\underset{\uparrow\,\forall x}{0}$ → за озн. Коші, ряд (1) - зб.

3. $0<L<\infty$ $\forall |x|<\frac{1}{L}=R$ Розгл. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|x|\sqrt[n]{|a_n|}=|x|\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=|x|\cdot L<1 \to$
→ ряд зб.

$|x|>\frac{1}{L}$ → (аналогічно) → $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n x^n|}>1$ → ряд розбіжний.

Випадок $L=\infty$ доводиться аналогічно - за стос.

ознаку Коші. ◀

Зауваж. 1. Не доведено, що $|x|\overline{\lim}(\dots) = \overline{\lim}((\dots)\cdot|x|)$;

2. Практично при дослідженні степеневих рядів зручно шукати $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, а також $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$. Якщо вона існує, то вона рівна $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

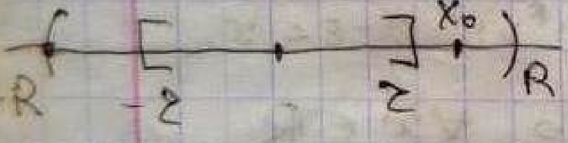
$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Отже, $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$.

Властивості степеневих рядів.

1 Нехай R - радіус зб. степеневого ряду (1). тоді $\forall r: [-r, r] \subset \,]-R, R[$ ряд (1) збіг. рівномірно на $[-r, r]$.

▶ Візьмемо $[x_0] \in \,]r, R[$



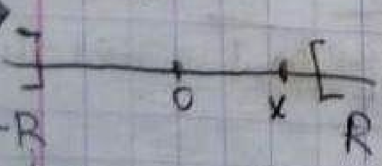
R - радіус зб. → $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^{n}$ -

за лемою Абеля $\longrightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n r^n| < \infty$

→ $\forall x \in [-r, r]$ $|a_n x^n| \le |a_n r^n|$ - за озн Вейєрштрасса $\sum\limits_{n=1} a_n x^n$ - зб. рівномірно на $[-r, r]$. ◀

2. Сума степ. ряду є непер. ф-єю в інтервалі збіжності.

▶



Візьмемо $\forall x \in \,]-R, R[$. Для неї $\exists r: |x| < |r| < [R]$.

За доведенням ряд зб. рівном. на $[-r, r]$ → сума непер-на в $[-r, r]$, а отже, і в т. x. ◀

Зауваж. Неперервність - локальна властиві

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ R   ]-R; R[

1. $\forall r<R$: на $[-r; r] \subset]-R; R[$ (1) - зб.
2. На]-R; R[f(x) - непер.

3. В інтервалі збіжності степеневий ряд можна почленно диференціювати:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

▸ Доведемо, що R^* - радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ рівен R.

За теор. Коші-Адамара, $R^* = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|}} =$

$= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{L} = R.$

(Використали, що $\{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = b, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = a\} \to$
$\to \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \cdot y_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$)

II спосіб. Візьмемо $\forall x \in]-R; R[$ Виберемо r_0 і r_1 так: $|x| < r_0 < r_1 < R$.

Розгл. $|n a_n x^{n-1}| \le n|a_n||r_0|^{n-1} =$
$= n|a_n r_1^{n-1}| \left|\frac{r_0}{r_1}\right|^{n-1}$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ - зб.,
отже, $a_n r^n$ - обмеж. $\to$ $\exists M$ $|a_n r^n| \le M$.
Тому $n|a_n r_1^{n-1}| \left|\frac{r_0}{r_1}\right|^{n-1} < n M_1 \left|\frac{r_0}{r_1}\right|^{n-1} =$
$= n M_1 q^{n-1}$ $q<1$. $M_1 = \frac{M}{r}$

Розгл. $\sum_{n=0}^{\infty} n q^{n-1}$ - зб. за ознакою Коші

Ми показали, що для $x \in]-R;R[$ продифер. ряд є зб. Також показано, що на $[-r_0; r_0]$ продифер. ряд збіг. рівномір за знаком Вейерштрасса

Візьмемо $\forall x \in]-R;R[$, для нього знайде r_0: $x \in]-r_0 ; r_0[\subset]-R;R[$. Тоді на $[-r_0$ продифер. ряд збіг. рівномірно тому за теор. про дифер. рядів, їх можна почле но диференціювати.

4. Почленне інтегрування.

Степеневий ряд можна почленно інте вати в інтервалі збіжності.

Це випливає з властивості 1. і тео ми про почленне інтегрування функц. ряд

$\forall x \in]-R;R[$. Розгл. $\forall [a, x] \in]-R;R[$ функц. ряд (1) зб. рівномірно на $[a, x]$.

Тому

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n x^n dx.$$

$$a=0: \int_0^x a_n x^n dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Лекція 21

①

Ряд Тейлора

Частковим випадком степеневих рядів, який зв'язаний з формулою Тейлора, є ряд Тейлора.

Нехай ф-ія f в $U(x_0)$ має похідні для $\forall n \ \exists f^{(n)}(x)$

Означення. Рядом Тейлора ф-ії $f(x)$ в околі т. x_0 $U(x_0)$ будемо називати ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Таким чином функції f відповідає ряд Тейлор

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

запишемо так

Постає питання: чи ряд Тейлора збігається до ф-ії $f(x)$?

Взагалі кажучи ні! Наприклад для

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Але неї $f^{(n)}(x) \equiv 0$ але $f(x) \not\equiv 0$.

Але є теорема.

Теорема. Для того, щоб ряд Тейлора збігався до своєї ф-ії необх. і дост. щоб залишок $r_n(x,f)$ у формулі Тейлора прямував до нуля.

Тобто

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \Longleftrightarrow r_n(x,f) \to 0$$

Доведення випливає з означення суми ряду.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Відомо, що $f(x) - S_n(x) = r_n(x,f)$

Тому

$$S_n(x) \to f(x) \Leftrightarrow r_n(x,f) \to 0$$

Теорема. Нехай функція $f(x)$ зображена (задана) степеневим рядом (як сума степеневого ряду) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, тоді цей ряд є її рядом Тейлора.

Довед. В інтервалі збіжності $U(x_0)$ ряд можна почленно диференц.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0)^2 + 4\cdot 3(x-x_0)^2 a_n + \dots$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0) + \dots$$

— — — — — —

$$f(x_0) = a_0$$
$$f'(x_0) = a_1$$
$$f''(x_0) = 2\cdot a_2$$
$$f'''(x_0) = 2\cdot 3a_3$$

— — —

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$$
$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

— —

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

— —

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

Теорема. Нехай в $U(x_0)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad і$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n. \text{ Тоді}$$

$$\forall x \in U(x_0)\ [f(x)=g(x)] \Rightarrow a_n = b_n$$

Дов. З попередн. теор

$$a_n = \frac{f^{n}(x_0)}{n!}, \quad b_n = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}$$

і

з $f(x) = g(x) \Rightarrow f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x) \Rightarrow a_n = b_n$

З теореми випливає єдиність зображення функції степеневим рядом.

Розвинення елементарних функцій в степеневі ряди

Теорема. Нехай для функції f в околі $U_H(x_0)$

- $\forall n \ \exists f^{n}(x)$
- $\exists M \ \forall n \ \forall x \in U_H(x_0)\ [\,|f^{(n)}(x)| \le M\,]$

Тоді

$$\forall x \in U_H(x_0) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

(Це означає, що в околі $U_H(x_0)$ ряд Тейлора збіжн. до своєї ф-ї $f(x)$)

Довед. Для доведення потрібно показати, що

$$\forall x \in U_H(x_0) \quad r_n(f,x) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Запишемо $r_n(f,x)$ у формі Лагранжа

$$|r_n(x,\xi)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \le \frac{M H^{n+1}}{(n+1)!}$$

Для доведення, що

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x,f)=0 \quad , \lim_{n\to\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$ і дослідимо його збіжн. за Даламбером.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{H^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{H}{n+2}=0<1$$, Ряд збіжний.

Отже загальн. член $\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

Побудова розкладів елементарних функцій

1. $f(x)=e^{x} \quad x_0=0$

$\forall n \quad f^{n}(x)=e^{x}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad \exists (-H.H)\ni x \quad |f^{(n)}(x)|\le e^{H}=M$

$$\boxed{e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots\dots}$$

2. $f(x)=\sin x$

$\forall n \ \exists\ f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad |f^{(n)}(x)|\le 1$

$$\boxed{\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots\dots}$$

3. $$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\quad+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{2n!}+\dots}$$

4. Відомо, що $\forall x \quad |x|<1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \qquad + (-1)^n x^n + \dots$$

проінтегр.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \qquad + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

$|x|<1$, $x=1$.

5. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$

$|x|<1$

Означення елементарних функцій комплексних змінних

$$e^z \overset{df}{=} 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots \qquad -$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\dots$$

Тоді

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots \quad =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= \cos x + i \sin x$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \qquad e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Лекція 22

Розвинення елементарних функцій в степеневі ряди

Ряд Тейлора

$$f(x) \boxed{\cong} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

збіжність ?!

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \qquad \underline{x \in \mathbb{R}}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \qquad \underline{x \in \mathbb{R}}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \quad + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \qquad |x|<1,\ x=1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots} \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - \dots (-1)^n x^n + \dots$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \quad + (-1)^n n x^{n-1} + \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \quad + (-1)^{n+1} n x^{n-1} + \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^m} = \dots\dots\dots$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \quad + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$f(x) = \arcsin x$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{(-1/2)(-x^2)}{1!} + \frac{(-1/2)(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(-x^2)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{(-1/2)(-1/2-1)\dots(-1/2-n+1)}{n!}(-x^2)^n + \dots = \dots$$

по степеням x

$$f(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \dots\right)$$

по степеням $(x-2)$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{3+(x-2)} = \frac{1}{3(1+\frac{x-2}{3})} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x-2}{3} + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + \quad \cdot \quad + (-1)^n\left(\frac{x-2}{3}\right)^n + \dots\right) = \dots$$

по степеням x

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} =$$

$$= -\frac{A}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{B}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

$$= -\frac{A}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \dots\right) - \frac{B}{3}\left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{3}\right)^n + \dots\right)$$

$$= -\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{3}\right) + (\quad)x + (\quad)x^2 + \dots$$

по степеням x

$$f(x)= \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{1-x}{1-x^3} =$$

$$=(1-x)\left(1+x^3+x^6+\dots+x^{3n}+\dots\right)=$$

$$=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+$$

по степеням $x-2$

$$f(x)=e^x = e^{x-2}\cdot e^2 = e^2\left(1+\frac{x-2}{1!}+\frac{(x-2)^2}{2!}+\dots+\frac{(x-2)^n}{n!}+\dots\right)$$

по степеням x

$$f(x)=\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2n!}+\dots\right)$$

по степеням $(x-2)$

$$f(x)=\ln x = \ln(x-2+2) = \ln 2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=$$

$$=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\dots$$

по степеням $\frac{1}{x}$

$$f(x)=\frac{1}{2-x}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\frac{2}{x}-1}\right)=-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{x}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{x}+\left(\frac{2}{x}\right)^2+\dots+\left(\frac{2}{x}\right)^n+\dots\right)$$

по степеням $(x-2)$

$$f(x) = \ln(4+3x-x^2) = \ln(4-x)(x+1) =$$

$$= \ln\left[(2-(x-2))(3+(x-2))\right] =$$

$$= \ln 2\left(1-\frac{x-2}{2}\right) + \ln 3\left(1+\frac{x-2}{3}\right) =$$

$$= \ln 2 + \ln\left(1-\boxed{\frac{x-2}{2}}\right) + \ln 3 + \ln\left(1+\boxed{\frac{x-2}{3}}\right)$$

$$= \ln 6 + \dots$$

$\ln(1+x) \sim$

$\ln(1-x) =$

$-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\dots$

по степеням x

$$f(x) = \mathrm{arctg}\,\frac{x+3}{x-3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2}\cdot\left(-\frac{6}{(x-3)^2}\right) = -\frac{3}{x^2+9} = -\frac{1}{3\left(1+\frac{x^2}{9}\right)}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\right) = -\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^4- \quad +(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}+\dots\right)$$

$$f(x)-\underset{\substack{\parallel \\ -\frac{\pi}{4}}}{f(0)} = \int_0^x f'(x)\,dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{3^{2n+1}}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Обчислити суму ряду

$$f(x) = \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \quad + \frac{x^n}{n(n+1)} + \dots$$

$$x\cdot f(x) = \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \dots$$

$$(x f(x))' = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$(x f(x))'' = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$\int (x f(x))'' dx = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C$$

$$(x f(x))' = -\ln(1-x) + C \qquad C=0$$

$$x f(x) = -\int \ln(1-x)\, dx + \cancel{Cx}$$

$$x f(x) = -x\ln(1-x) + \int -x^{+1}\frac{-1}{1-x} dx =$$

$$= -x\ln(1-x) + x + \ln(1-x) + C \qquad x=0,\ C=0$$

$$x f(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$$

$$f(x) = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$$